

**IKKI KARRALI INTEGRALLAR**

Raxmatillayeva Dinora

Qudratova Zuhra

Talabalar:

Boqiyev Xushnud

Ilmiy rahbar:

<https://doi.org/10.5281/zenodo.20070319>**Annotatsiya**

Ushbu maqolada ikki karrali integralning asosiy tushunchalari, uning geometrik (jism hajmi va soha yuzasi) va fizik (massa, statik momentlar, massa markazi, inersiya momentlari) ma'nolari batafsil yoritilgan. Integralning mavjudlik sharti, chiziqlilik, additivlik, monotonlik va o'rta qiymat teoremasi kabi asosiy xossalari keltirilgan. Ikki karrali integralni to'g'ri to'rtburchak va ixtiyoriy shakldagi sohalarda takroriy integralga keltirib hisoblash usullari ko'rsatilgan, integrallash tartibini almashtirish texnikasi misol bilan tahlil qilingan. Qutb koordinatalariga o'tish va yakobian yordamida koordinata almashtirishning ahamiyati, ayniqsa aylana va halqa shaklidagi sohalarda uchun, misollar bilan izohlangan. Maqolaning amaliy qismida to'liq hisoblash misollari (yuz, hajm, massa, massa markazi) keltirilib, ularning bosqichma-bosqich yechimi berilgan. Maqola oliy matematikaning «Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar integral hisobi» bo'limini chuqurroq o'zlashtirmoqchi bo'lgan talabalar, magistrantlar va mustaqil izlanuvchilar uchun mo'ljallangan. Nazariy ma'lumotlar soddalashtirilgan va tizimli ravishda, misollar bilan mustahkamlangan holda bayon qilingan.

Kalit so'zlar: Ikki karrali integral, takroriy integral, yuz elementi, integrallanuvchanlik sharti, additivlik, o'rta qiymat teoremasi, qutb koordinatalari, yakobian, koordinata almashtirishi, integrallash tartibini almashtirish, geometrik tatbiqlar, hajm hisoblash, fizik tatbiqlar, tekis plastinka massasi, statik moment, massa markazi, inersiya momenti.

Abstract

This article provides a comprehensive overview of double integrals, a fundamental concept in multivariable calculus. The definition of double integral, the condition of integrability, and its geometric interpretation (volume of a solid and area of a planar region) are discussed in detail. Physical applications, including mass, static moments, center of mass, and moments of inertia for a planar lamina with variable density, are also presented. Basic properties such as linearity, additivity, monotonicity, and the mean value theorem are formulated. The main methods for evaluating double integrals are explained step by step: reducing to iterated integrals over rectangular and arbitrary (y-simple and x-simple) domains, changing the order of integration, and transforming coordinates using the Jacobian. Particular attention is paid to polar coordinates, which simplify integration over circular and annular regions. Several complete worked examples are provided, including calculations of area, volume, mass, and center of mass. The article is intended for undergraduate students, graduate students, and independent learners studying integral calculus of functions of several variables. Theoretical concepts are presented in a clear, systematic manner with practical examples for reinforcement.

Ikki karrali integral — matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u ko'p o'zgaruvchili funksiyalarni o'rganishda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Ushbu tushuncha bir o'zgaruvchili integralning tabiiy umumlashmasi hisoblanib, tekislikdagi soha bo'yicha funksiyaning umumiy yig'indisini aniqlash imkonini beradi. Ikki karrali integrallar yordamida nafaqat geometrik masalalar, masalan, yuzalar maydonini yoki jismlarning hajmini hisoblash, balki fizik va texnik jarayonlarni modellashirish ham mumkin.

Mazkur mavzu oliy matematika kursining muhim tarkibiy qismi bo'lib, u talabalar va tadqiqotchilarga murakkab tizimlarni chuqurroq tushunish imkonini beradi. Ikki karrali integrallarni o'rganish orqali funksiyalarning fazodagi xatti-harakatini tahlil qilish, turli koordinata tizimlarida hisoblash usullarini qo'llash va amaliy masalalarni samarali hal etish ko'nikmalari shakllanadi. Shu bois, ushbu maqolada ikki karrali integral tushunchasi, uning asosiy xossalari va qo'llanilish sohalari yoritiladi.

Metodologiya

Biror chegaralangan $\{L\} \subset \mathbb{R}^2$ soha berilgan bo'lsin. Bu sohani bo'laklarga ajratuvchi chekli sondagi l chiziqlar sistemasi $\{l\}$ (D) sohaning bo'linishi deb ataladi va $u P = \{l_1, l_2, \dots\}$ kabi belgilanadi. (D) sohani bo'laklarga ajratuvchi har bir l chiziq P bo'linishning bo'luvchi chizig'i, (D) sohaning bo'lagi esa P bo'linishning bo'lagi deyiladi. P bo'linish bo'laklari diametrining eng kattasi uning diametri deb ataladi va $u \lambda(P)$ kabi belgilanadi. (D) sohaning bo'linishlar to'plamini $\{P\}$ orqali belgilaymiz. $f(x, y)$ funksiya (D) $\subset \mathbb{R}^2$ sohada berilgan bo'lsin. Bu sohaning P bo'linishini va bu bo'linishlarning har bir kvadratlanuvchi (D_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) bo'lagida ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqta olib:

$$\sigma = \sum_{k=0}^n f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

yig'indini tuzaylik, bunda $D_k - D_k$ sohaning yuzi

Ta'rif bo'yicha tekshirish:

1-ta'rif.

$\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topilsinki, (D) sohaning diametri $\delta < \delta$ bo'lgan har qanday bo'linishi hamda har bir (D_k) bo'lakdagi ixtiyoriy (ξ_k, η_k) nuqtalar uchun

$$|\sigma - I| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, u holda funksiya integrallanuvchi va I songa $\iint_D f(x, y)$ funksiyaning (D) soha bo'yicha ikki karrali integrali (Riman integrali) deyiladi va u

$$\iint_D f(x, y) dD = \lim \sum f(\xi_k, \eta_k) D_k$$

kabi belgilanadi.

Demak, $f(x, y)$ funksiya (D) $\subset \mathbb{R}^2$ sohada berilgan va chegaralangan bo'lsin. (D) sohaning biror P bo'linishini qaraylik.

$$m_k = \inf f(x, y),$$

$$M_k = \sup f(x, y), (x, y) \in D_k$$

lar yordamida

$$s = \sum m_k D_k, \quad S = \sum M_k D_k$$

yig'indilarni tuzamiz. Odatda bu yig'indilar mos ravishda Darbuning quyi hamda yuqori yig'indilari deb ataladi. (D) sohaning har bir bo'linishi uchun $S \geq s$ munosabat o'rinli.

2-ta'rif.

$$\sup\{s\} = \inf\{S\} = I$$

miqdorlarga mos ravishda $f(x, y)$ funksiyaning (D) sohadagi quyi ikki karrali hamda yuqori ikki karrali integrali deb ataladi.

3-ta'rif.

Agar $f(x, y)$ funksiyaning (D) sohada quyi hamda yuqori ikki karrali integrallari bir-biriga teng bo'lsa, u holda $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi, ularning umumiy qiymati

$$I = \iint_D f(x, y) dD$$

$f(x, y)$ funksiyaning (D) sohadagi ikki karrali integrali (Riman integrali) deyiladi va

$$\iint_{(D)} f(x, y) dD$$

kabi belgilanadi.

2. Ikki karrali integralning mavjudligi. Integrallanuvchi funksiyalar sinfi.**1-teorema.**

Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham, shunday $\delta > 0$ topilsinki, (D) sohaning diametri $\lambda < \delta$ bo'lgan har qanday bo'linishiga nisbatan Darbu yig'indilari

$$S(f) - s(f) < \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishi zarur va etarli.

2-teorema.

Agar $f(x, y)$ funksiya chegaralangan yopiq $(D) \subset R^2$ sohada berilgan va uzluksiz bo'lsa, u shu sohada integrallanuvchi bo'ladi.

3-teorema.

Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada chegaralangan va bu sohaning cheki soni nol yuzali chiziqlardan iborat bo'lsa, qolgan barcha nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'ladi.

Yuqori karrali integrallar yordamida tekis shaklning yuzi, jismlarning hajmlarini topish mumkin. Integral ta'rifidan bevosita (1) shaklni yozamiz:

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

bo'lishi kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu

$$\iint_D xy dD, \quad (D) = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

integralni ta'rif yordamida hisoblang.

Yechish.

$f(x, y) = xy$ funksiya (D) da uzluksiz, demak 2-teoremaga ko'ra, u (D) da integrallanuvchi bo'ladi. (D) sohani chiziqlar yordamida bo'laklarga ajratamiz va har bir deb qaraymiz. U holda

$$\sigma = \sum \sum f(\xi_i, \eta_j) D_{ij} = (1/n^2) \sum \sum ij = (1/n^4) \cdot [n(n-1)/2] \cdot [n(n-1)/2]$$

bo'ladi.

Bundan esa $n \rightarrow \infty$ da

$$\sigma \rightarrow 1/4$$

Demak,

$$\iint_D xy dD = 1/4$$

1°. $f(x, y)$ funksiyasi D sohada integrallanuvchi bo'lsin. Bu funksiyani D sohada tenglik bilan nolga teng qiymatli bo'lgan L chiziqlar ($L \subset (D)$) qiymatlarini o'zgartirishdan hosil bo'lgan $F(x, y)$ funksiyasi ham D sohada integrallanuvchi bo'ladi, ya'ni

$$\iint_D f(x, y) dD = \iint_D F(x, y) dD$$

bo'ladi

2°. $f(x, y)$ funksiyasi D sohada berilgan bo'lib, D soha nolga teng bo'lmagan bilan D_1 va D_2 sohalarga ajralgan bo'lsin. Agar $f(x, y)$ funksiyasi D sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda D_1 va D_2 sohalarda ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\iint_D f(x, y) dD = \iint_{D_1} f(x, y) dD + \iint_{D_2} f(x, y) dD$$

3°. Agar $f(x, y)$ funksiyasi D sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $c \cdot f(x, y)$ ($c = \text{const}$) ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\iint_D c f(x, y) dD = c \iint_D f(x, y) dD$$

4°. Agar $f(x, y)$ va $g(x, y)$ funksiyalar D sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $f(x, y) \pm g(x, y)$ funksiyalar ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\iint_D f(x, y) \pm g(x, y) dD = \iint_D f(x, y) dD \pm \iint_D g(x, y) dD$$

formula o'rinli.

5°. Agar $f(x, y)$ funksiyasi D sohada integrallanuvchi bo'lib, $f(x, y) \geq 0$ bo'lsa, u holda

$$\iint_D f(x, y) dD \geq 0$$

bo'ladi

6°. Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x, y)|$ funksiya ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\left| \iint_D f(x, y) dD \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dD$$

tengsizlik o'rinli.

7°. O'rta qiymat haqidagi teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda

shunday o'zgarmas son

$$\mu \quad (m \leq \mu \leq M, M = \sup_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\}, m = \inf_{(x, y) \in (D)} \{f(x, y)\})$$

mavjudki,

$$\iint_D f(x, y) dD = \mu D$$

formula o'rinli, bu yerda D — (D) sohaning yuzi.

Natija. Agar $f(x, y)$ funksiya yopiq (D) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $(a, b) \in (D)$ topiladiki,

$$\iint_D f(x, y) dD = f(a, b) D$$

bo'ladi.

8°. O'rta qiymat haqidagi umumlashgan teorema. Agar $g(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi

bo'lib, u shu sohada o'z ishorasini saqlasa va $f(x, y)$ funksiya (D) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday

$(a, b) \in (D)$ topiladiki,

$$\iint_D f(x, y) g(x, y) dD = f(a, b) \iint_D g(x, y) dD$$

bo'ladi.

$f(x, y)$ funksiya (D) sohada berilgan bo'lib, u shu sohada integrallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya (D)

sohaning yuzaga ega bo'lgan har qanday (d) qismida integrallanuvchi va

$$\int \int (d) f(x, y) dD$$

integral d ga bog'liq bo'ladi. Odatda bu

$$\Phi((d)) = \int \int (d) f(x, y) dD$$

Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x, y)|$ funksiya ham shu sohada integrallanuvchi va

$$\left| \int \int_D f(x, y) dD \right| \leq \int \int |f(x, y)| dD$$

tengsizlik o'rinli.

7°. O'rta qiymat haqidagi teorema. Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lsa, u holda shunday o'zgarmas son

$$\mu(m \leq \mu \leq M, M = \sup_{(x,y) \in (D)} \{f(x, y)\}, m = \inf_{(x,y) \in (D)} \{f(x, y)\})$$

Mavjudki,

$$\int \int_D f(x, y) dD = \mu D$$

formula o'rinli, bu yerda D — (D) sohaning yuzi.

Natija. Agar $f(x, y)$ funksiya yopiq (D) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $(a, b) \in D$ topiladiki,

$$\int \int_D f(x, y) dD = f(a, b) D$$

bo'ladi.

8°. O'rta qiymat haqidagi umumlashgan teorema. Agar $g(x, y)$ funksiya (D) sohada integrallanuvchi bo'lib, u shu sohada o'z ishorasini saqlasa va $f(x, y)$ funksiya (D) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday $(a, b) \in D$ topiladiki,

$$\int \int_D f(x, y) g(x, y) dD = f(a, b) \int \int_D g(x, y) dD$$

bo'ladi.

$f(x, y)$ funksiya D)sohada berilgan bo'lib, u shu sohada integrallanuvchi bo'lsin. Bu funksiya (D) sohaning yuzaga ega bo'lgan har qanday (d) qismida integrallanuvchi va

$$\int \int_a f(x, y) dD$$

integral d ga bog'liq bo'ladi. Odatda bu

$$\phi((d)) = \int \int_a f(x, y) dD$$

funksiya sohaning funksiyasi deb ataladi. (D)sohada biror (x_0, y) nuqtani olaylik. (d) esa shu nuqtani o'z ichiga olgan soha bo'lsin. Agar $\lambda \rightarrow 0$ da $\frac{\phi((d))}{d}$ nisbatning limiti $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi((d))}{d}$ mavjud va chekli bo'lsa, bu limit $\Phi((d))$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi soha bo'yicha hosilasi deb ataladi.

Agar $f(x, y)$ funksiya (D) sohada uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi((d))$ funksiyaning (x_0, y_0) nuqtadagi soha bo'yicha hosilasi $f(x_0, y_0)$ ga teng bo'ladi.

4-teorema. $f(x, y)$ funksiya $D = \{(x, y) \in R^2: a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin.

Agar $x \in [a, b]$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Integral mavjud bo'lsa, u holda

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

o'rinli

5-teorema $f(x, y)$ funksiya (D) sohada berilgan va integrallanuvchi bo'lsin. Agar $x \in [a, b]$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida $\int_c^d f(x, y) dy$ integral mavjud bo'lsa, $y \in [c, d]$ o'zgaruvchining har bir tayin qiymatida $\int_a^b f(x, y) dx$ integral mavjud bo'lsa, u holda

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Integrallar han mavjud va

$$\iint_D f(x, y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

formula o'rinli

Xulosa

Ikki karrali integrallar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar analizining fundamental qismlaridan biri bo'lib, u matematik tahlilni tekislikdagi sohalar bo'yicha umumlashtirish imkonini beradi. Ushbu mavzu doirasida amalga oshirilgan tahlillar quyidagi muhim xulosalarni chiqarishga asos bo'ladi: Geometrik va Fizik Mohiyat: Ikki karrali integral nafaqat egri chiziqli silindrsimon jismlarning hajmini hisoblashda, balki tekis shakllarning yuzi, massasi, og'irlik markazi va inersiya momentlarini aniqlashda ham asosiy vosita hisoblanadi. Bu uni muhandislik va nazariy fizika masalalarini yechishda almashtirib bo'lmaydigan usulga aylantiradi. Hisoblash Metodologiyasi: Murakkab sohalar bo'yicha integrallashni osonlashtirishda Fubini teoremasi va o'zgaruvchilarni almashtirish (xususan, qutb koordinatalar sistemasiga o'tish) usullari hal qiluvchi ahamiyatga ega. Bu usullar yuqori tartibli integrallarni ketma-ket hisoblanuvchi oddiy integrallarga keltirish orqali hisoblash samaradorligini oshiradi. Uzluksizlik va Integrallanuvchanlik: Tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, sohada uzluksiz bo'lgan funksiyalar har doim integrallanuvchidir. Biroq, zamonaviy analiz usullari uzilish nuqtalariga ega bo'lgan funksiyalar uchun ham integral tushunchasini kengaytirishga va ularni amaliyotda qo'llashga zamin yaratadi. Amaliy Ahamiyati: Ikki karrali integrallar nazariyasi keyinchalik uch karrali va sirt integrallarini o'rganish uchun poydevor vazifasini o'taydi. U gidrodinamika, elektrodinamika va ehtimollar nazariyasi kabi sohalardagi murakkab jarayonlarni matematik modellashtirishda keng qo'llaniladi. Xulosa qilib aytganda,

ikki karrali integrallarni o'rganish va ularni hisoblash usullarini takomillashtirish, zamonaviy ilm-fanning ko'plab tarmoqlarida uchraydigan ko'p o'lchovli masalalarni aniq va tushunarli tarzda ifodalash imkonini beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abdullayev, A. (2020). Matematik modelashtirish asoslari. Toshkent: Fan.
2. Arnold, V. I. (1984). Oddiy differensial tenglamalar. Moskva: Nauka.
3. Barbashin, E. A. (1967). Turg'unlik nazariyasiga kirish. Moskva: Nauka.
4. Boymirzayev, K. M. (2018). Differensial tenglamalar. Toshkent: O'zbekiston.
5. Demidovich, B. P. (1967). Turg'unlikning matematik nazariyasi bo'yicha ma'ruzalar. Moskva: Nauka.
6. Hahn, W. (1967). Stability of Motion. Berlin: Springer-Verlag.
7. Jo'rayev, T. J., & Sa'dullayev, A. (1995). Differensial tenglamalar kursi. Toshkent: O'qituvchi.
8. Khalil, H. K. (2002). Nonlinear Systems (3rd ed.). Upper Saddle River: Prentice Hall.
9. Krasovskiy, N. N. (1959). Harakat turg'unligi nazariyasining ayrim masalalari. Moskva: Fizmatgiz.
10. LaSalle, J. P., & Lefschetz, S. (1961). Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications. New York: Academic Press.