ПОНЯТИЕ ПСЕВДО n-ОЙ СТЕПЕНИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ РИЧАРДСОНА

Садыков Ахунджан Рахимджанович
кандидат физико-математических наук,
Министерство Внутренних дел Республики Узбекистан,
Андижанский академический лицей
https://doi.org/10.5281/zenodo.17774375

Аннотация: Введено новое понятие “псевдо *n* – ой степени” и доказаны ряд свойств этого понятия. С помощью применения этих свойств псевдо *n* – ой степени удалось упростить формулу для погрешности в полиномиальной экстраполяции Ричардсона. Определена связь понятия псевдо *n* – ой степени с известной формулой из элементарной математики.

Ключевые слова: новое понятие, экстраполяция Ричардсона, упрощение формулы погрешности.

Annotatsiya: “Psevdo *n*-daraja” yangi tushunchasi kiritildi va ushbu tushunchaning bir qator xossalari isbotlandi. Psevdo *n*-daraja xossalaridan foydalangan holda Richardson polynomial ekstrapolyatsiyasidagi xatolik formulasini soddalashtirishga erishildi. Psevdo *n*-daraja tushunchasining elementar matematikadagi formula bilan bogʻliqligi aniqlandi.

Kalit soʻzlar: yangi tushuncha, Richardson ekstrapolyatsiyasi, xatolik formulasini soddalashtirish.

Abstract: A new concept of "pseudo *n*-th power" is introduced, and a number of properties of this concept are proved. By applying these properties of the pseudo *n*-th power, it was possible to simplify the error formula in Richardson polynomial extrapolation. The relationship between the concept of pseudo *n*-th power and a well-known formula from elementary mathematics is established.

Keywords: new concept, Richardson extrapolation, error formula simplification.

Введение. Идея о введении понятия псевдо *n* - ой степени пришла автору при численных расчетах погрешности полиномиальной экстраполяции Ричардсона с помощью компьютеров. Сведения об экстраполяции Ричардсона приведены в работах [3]-[5]. С применением свойств этого понятия стало возможным существенно упрошать формулу для вычисления погрешности в полиномиальной экстраполяции Ричардсона приведенних в [1] и в [2] .

Цель статьи – сформулировать свойства нового понятия псевдо *n* – ой степени и доказать справедливость этих свойств и показать применение этих свойств при упрощении формулы погрешности в полиномиальной экстраполяции Ричардсона. Сначала приведем эту формулу.

Формула для погрешности в полиномиальной экстраполяции Ричардсона. Пусть– $\varphi(x)$ точное решение, а $\phi(x,\ h_i)$ – приближенные решения какой-либо задачи, вычисленные при различных значениях h_i , $i = 1,2,\dots$. Параметры h_i таковы, что $\phi(x, h_i) \to \varphi(x)$ при $h_i \to 0$. Предположим, что существует следующее разложение погрешности для каждого приближенного решения $\phi(x,h_i)$:

$$r(x, h_i) = \varphi(x) - \phi(x, h_i) = \sum_{n=1}^{k} v_n(x) h_i^{sn} + o(h_i^{sn}) \qquad (1)$$

где $v_n(x)$ не зависят от h_i , s – действительное положительное число

Приближенное решение $\phi(x,\ h_i)$ назовем экстраполяцией нулевого порядка и обозначим как $\phi_i^{(0)}$. Экстраполяция j – го порядка при $j \geq 1$ вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$\phi_i^{(j)} = \frac{\phi_{i+j}^{(j-1)} H_i - \phi_i^{(j-1)} H_{i+j}}{H_i - H_{i+j}}, \qquad (2)$$

где $H_i = h_i^s$, $i = 1,2,\ldots$. Тогда погрешность j – ой экстраполяции выражается следующей формулой:

$$r_i^{(j)} = \varphi - \phi_i^{(j)} = (-1)^j \prod_{z=i}^{i+j} H_z \left\{ v_{j+1} + \sum_{n=j+2}^{k} v_n H_m^{n-1} \times \left[\prod_{p=i}^{i+j}{}_m \left(H_m - H_p \right) \right]^{-1} \right\} + o(H^k) \quad (3)$$

Здесь $\prod_m$ – произведение, в котором m-й сомножитель равен единице.

Понятие псевдо *n* – ой степени. Теперь введем и докажем некоторые свойства псевдо n – ой степени а также увидем как упрошается формула (3) с помощью этих свойств.

Определение 1. Псевдо n - ой степенью параметра H принимающего действительные значения, называется обычная n – ая степень этого параметра.

Если обозначим псевдо n - ую степень параметра H как $H^{[n]}$ то по определению 1 имеем

$H^{[n]} = H^n$

Определение 2. Псевдо n - ой степенью суммы $H_1 + H_2 + \ldots + H_p$, где каждое слагаемое представляет собой параметр или сумму параметров, принимающих действительные значения, называется сумма всевозможных различных выражений следующего вида:

$$H_1^{[m_1]} \cdot H_2^{[m_2]} \cdot \ldots \cdot H_p^{[m_p]},$$

где m_1 , m_2 , ..., m_p целые неотрицательные числа, $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$ и $n > 0$

Если сумму всевозможных различных значений вида $H_1^{[m_1]} \cdot H_2^{[m_2]} \cdot \ldots \cdot H_p^{[m_p]}$ из определения 2 обозначим как $\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_p=n} H_1^{m_1} \cdot H_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$, то для псевдо n – ой ($n > 0$) степени суммы

$H_1 + H_2 + \ldots + H_p$ имеет место следующее равенство:

$$(H_1 + H_2 + \ldots + H_p)^{[n]} = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_p=n} H_1^{m_1} \cdot H_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$$

При $n = 0$ по определению предположим, что

$(H_1 + H_2 + \ldots + H_p)^{[0]} = 1$

Псевдо n- ая степень имеет следующие свойства:

1- свойство. При $p \geq 2$ имеет место равенство

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = (H_1+ (H_2+\ldots+H_p))^{[n]}$ (4)

Доказательство. По определению имеет место равенство

$$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = \sum_{m_1+m_2+\ldots+m_p=n} H_1^{m_1} \cdot H_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} \qquad (5)$$

Слагаемые суммы $\sum_{m_1+m_2+\ldots+m_p=n} H_1^{m_1} \cdot H_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$ разделим на $n+1$ групп следующим образом : на первую группу собираем все слагаемые в которых степень параметра H_1 равна на 0, на вторую группу собираем все слагаемые в которых степень параметра H_1 равна на 1 и т. д. и $n+1$ –ую группу составляют все слагаемые в которых степень показателя H_1 равна на n. Если пронумеруем эти группы через 1), 2), ..., n), n+1) - соответственно, то эти группы будут состоять из следующих сумм:

1) $\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$

2) $\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-1} H_1 \cdot H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$

3) $\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-2} H_1^2 \cdot H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$

$\vdots$

n) $\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=1} H_1^{n-1} \cdot H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p}$

$n+1$) H_1^n

Из второй группы вынесем за скобки H_1, из третьей группы вынесем за скобки H_1^2 и т.д. и полученные выражения подставим на правую часть (5):

$$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} =$$

$$= \sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} + H_1 \cdot \sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-1} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} +$$

$$+ H_1^2 \cdot \sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-2} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} + \cdots + H_1^{n-1} \cdot \sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=1} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} + H_1^n$$

По определению

$$\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} = (H_2 + H_3 + \ldots H_p)^{[n]}$$

$$\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-1} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} = (H_2 + H_3 + \ldots H_p)^{[n-1]}$$

IBAST | Volume 5, Issue 11, November

$$\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=n-2} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} = (H_2 + H_3 + \ldots H_p)^{[n-2]}$$

$$\vdots$$

$$\sum_{m_2+m_3+\ldots+m_p=1} H_2^{m_2} \cdot H_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot H_p^{m_p} = (H_2 + H_3 + \ldots H_p)^{[1]} = H_1 + H_2 + \ldots H_p$$

Подставляя эти выражения в (5) получим

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} =(H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n]} + H_1 (H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} +$
$+ H_1^2 (H_2+\ldots+H_p)^{[n-2]} + \ldots + H_1^{n-1} (H_2+\ldots+H_p) + H_1^n$

Последное выражение по определению равно на правую часть равенства (4)

2- свойство. При $p \geq 2$ имеет место равенство

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n]}$

Доказательство. В силу первого свойства имеем

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = (H_1+ (H_2+\ldots+H_p))^{[n]} = H_1^n + H_1^{n-1} (H_2+\ldots+H_p) + \quad + H_1^{n-2} (H_2+\ldots+H_p)^{[2]} + \ldots + H_1 (H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + (H_2+\ldots+H_p)^{[n]} =$

$= H_1(H_1^{n-1} + H_1^{n-2} (H_2+\ldots+H_p) + H_1^{n-3} (H_2+\ldots+H_p)^{[2]} + \ldots + (H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]}) + (H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = H_1 (H_1 +(H_1+ H_2+\ldots+H_p))^{[n-1]} + (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n]} =$
$= H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n]}$

3- свойство. При $p \geq 1$ имеет место равенство

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} - (H_2+ H_3+\ldots+H_{p+1})^{[n]} =(H_1 - H_{p+1}) (H_1+ H_2+\ldots+H_{p+1})^{[n-1]}$

Доказательство. В силу 2- свойства получим следующие равенства

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p+ H_{p+1})^{[n]} = H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p + H_{p+1})^{[n-1]} + + (H_2+ H_3+\ldots+H_p + H_{p+1})^{[n]}$

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p+ H_{p+1})^{[n]} = H_{p+1} (H_1+ H_2+\ldots+H_p + H_{p+1})^{[n-1]} + + (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]}$

Теперь, вычитая почленно эти равенства, получаем требуемое соотношение.

Отметим, что известная формула из элементарной математики

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

является частным случаем 3- свойства. Действительно, при $p = 1$ из 3-свойства получим

$$H_1^n - H_2^n = H_1^{[n]} - H_2^{[n]} = (H_1 - H_2)(H_1 + H\ )^{[n-1]} = (H_1 - H_2)(H_1^{n-1} + H_1^{n-2} H_2 + \ldots + H_2^{n-1})$$

4- свойство. При $p \geq 1$ имеет место равенство

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + H_2 (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n-1]} +$
$+ \ldots + H_p H_p^{[n-1]}$

Доказательство. Это свойство докажем с помощью многократного применения 2- свойства. В силу 2-свойства имеем

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n]}$

На второе слогаемое на правой части этого равенства еще раз применим 2- свойство:

$(H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n]} = H_1 (H_1+ H_2+\ldots+H_p)^{[n-1]} + H_2 (H_2+ H_3+\ldots+H_p)^{[n-1]} + (H_3+ +H_4+\ldots+H_p)^{[n]}$

На последнее слогаемое опять применим 2-свойство и т.д. Нетрудно заметить, что после p - кратного применения 2- свойства получим требуемое соотношение.

Упрощение формулы погрешности экстраполяции Ричардсона. Сформулируем и докажем следующую теорему:

Теорема. Если для погрешности нулевой экстрополяции имеет место разложение (1) , то для погрешности $r_i^{(j)}$ экстраполяции $\phi_i^{(j)}$ порядка j (j ≥0) вычисленного по формуле (2) справедлива следующая формула

$$r_i^{(j)} = \varphi - \phi_i^{(j)} = (-1)^j \prod_{z=i}^{i+j} H_z \left\{ v_{j+1} + \sum_{n=j+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i}^{i+j} H_m \right)^{[n-j-1]} \right\} + o(H^k) \qquad (6)$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы отметим, что формула (6) в сравнении с формулой (5) уже не содержить дробную часть и является целым алгебраическим выражением.

Доказательство теоремы. Формулу докажем методом математической индукции по параметру j. При $j = 0$ формула (6) формулой (1). Предположим , что она верна при $j = l$, где l – натуральное число. Из этого предположения следует, что

$$r_i^{(l)} = \varphi - \phi_i^{(l)} = (-1)^l \prod_{z=i}^{i+l} H_z \left\{ v_{l+1} + \sum_{n=l+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i}^{i+l} H_m \right)^{[n-l-1]} \right\} + o(H^k) \qquad (7)$$

$$r_{i+1}^{(l)} = \varphi - \phi_{i+1}^{(l)} = (-1)^l \prod_{z=i+1}^{i+l+1} H_z \left\{ v_{l+1} + \sum_{n=l+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i+1}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-1]} \right\} + o(H^k) \qquad (8)$$

Умножим обе части (7) и (8), соответственно, на H_{i+l+1} и H_i и из (8) почленно вычтем (7) :

$$r_{i+1}^{(l)} H_i - r_i^{(l)} H_{i+l+1} = (H_i - H_{i+l+1})\varphi - (\phi_{i+1}^{(l)} H_i - \phi_i^{(l)} H_{i+l+1}) =$$

$$= (-1)^l \prod_{z=i}^{i=l} H_z \left\{ v_{l+1} + \sum_{m=l+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i}^{i+l} H_m \right)^{[n-l-1]} - v_{l+1} - \sum_{m=l+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i+1}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-1]} - \right\} + o(H^k) =$$

$$= (-1)^l \prod_{z=i}^{i+l} H_z \left\{ \sum_{n=l+2}^{k} v_n \left[\left(\sum_{m=i}^{i+l} H_m \right)^{[n-l-1]} - \left(\sum_{m=i+1}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-1]} \right] \right\} + o(H^k) \qquad (9)$$

В силу свойства 3 псевдо n-ой степени имеем

$$\left(\sum_{m=i}^{i+l} H_m \right)^{[n-l-1]} - \left(\sum_{m=i+1}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-1]} = (H_i - H_{i+l+1}) \left(\sum_{m=i}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-2]}$$

Подставим это выражение в (9) и вынесем за скобки разность $H_i - H_{i+l+1}$:

$$r_{i+1}^{(l)} H_i - r_i^{(l)} H_{i+l+1} = (H_i - H_{i+l+1}) \left(\varphi - \frac{\phi_{i+1}^{(l)} H_i - \phi_i^{(l)} H_{i+l+1}}{H_i - H_{i+l+1}} \right) =$$

$$= (H_i - H_{i+l+1})(-1)^{l+1} \prod_{z=i}^{i+l+1} H_z \left\{ \sum_{n=l+2}^{k} v_n \left(\sum_{m=i}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-2]} \right\} + o(H^k) \qquad (10)$$

Разделив обе части равенства (10) на $H_i - H_{i+l+1}$ и используя формулу (2) получим

$$r_i^{(l+1)} = \frac{r_{i+1}^{(l)} H_i - r_i^{(l)} H_{i+l+1}}{H_i - H_{i+l+1}} = \varphi - \phi_i^{(l+1)} =$$

$$= (-1)^{l+1} \prod_{z=i}^{i+l+1} H_z \left\{ v_{l+2} + \sum_{n=l+3}^{k} v_n \left(\sum_{m=i}^{i+l+1} H_m \right)^{[n-l-2]} \right\} + o(H^k)$$

Значить, из условия верности формулы (6) при $j = l$ вытекает верность формулы при $j = l+1$. Теорема доказана.

Заключение. Из приведенных рассуждений следует, что понятие псевдо n – ой степени имеет определенный математический смысл в виде доказанных в этой статье свойств и имеет свое применение в упрощении формулы погрешности в полиномиальной экстраполяции Ричардсона.

Список литературы:

1. И. П. Добровольский. Экстраполяция Ричардсона в приближенном решении интегральных уравнений Фредгольма II рода, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, том 21, №4, 952-961
2. Добровольский И.П. Полиномиальная экстраполяция Ричардсона и её приложения./ The scientific heritage. Budapest, Hungary: № 59 (2021)
3. Добровольский И.П. Квазиквадратурное решение линейных интегральных уравнений в классе интегрируемых функций / The scientific heritage. Budapest, Hungary: № 55 (55). Vol. 2. (2020).P.48-52
4. Richardson L.F., The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differensial equations with an applications to the stress in a masonry dam. / Philos . Roy. Soc., London, 1910, Ser.A, v. 210, P. 307-357.
5. Полянин Ф. Д., Манжиров Ф. В. Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 608 с.