



## СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ НА УЧАСТКАХ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТЯГИ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Хасанова Зебо Зиёдилла қизи

докторант кафедры «Механика и  
математическое моделирование» математического факультета  
Национального университета Узбекистана.

zebohasanova436@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10071462>

**Аннотация:** Найдено частное аналитическое решение вариационной задачи о движении точки (центра масс КА) в случае ограниченной задачи трех тел для промежуточных дуг тяги. Получен линейный регулятор, обеспечивающий асимптотическую устойчивость этих заданных программных движений.

**Ключевые слова:** Космический аппарат, линейный регулятор, метод Лаудона, Земля, Луна.

### ВВЕДЕНИЯ

Рассматривается задача об оптимизации траекторий точки переменной массы (центр масс космического аппарата (КА)), движущейся с ограниченным секундным расходом массы в рамках ограниченной задачи трёх тел. Точка движется в гравитационном поле двух центров притяжения, массы которых соизмеримы, и для удобства названных Землёй и Луной. Луна движется относительно Земли по известной эллиптической орбите. Минимизируемый функционал - характеристическая скорость, что эквивалентно задаче о минимуме расхода массы. Дифференциальные уравнения вариационной задачи в геоцентрической инерциальной системе координат имеют гамильтонову форму и в случае ограниченной задачи трёх тел имеют два известных интеграла для участков промежуточной тяги. Этих интегралов недостаточно для определения общего решения. В данной работе при помощи метода Докшевича получены инвариантные соотношения, приводящие к различным частным решениям. Найдено следующее частное решение для участков промежуточной тяги.

Тяга радиальная. КА находится на прямой, проходящей через центры притяжения. Участок ПТ принадлежит эллиптической орбите с параметром, зависящим от начальных условий. Траектория КА подобна орбите Луны. Трансверсальная составляющая скорости изменяется обратно пропорционально расстоянию до неподвижного центра. Найдено ограничение на область движения КА. Найден закон изменения массы. Все величины выражены через истинную аномалию орбиты Луны, являющуюся известной функцией времени.

Рассмотрен вопрос об осуществимости найденного программного движения при автоматическом управлении. Найденное частное решение исследовано на устойчивость. Показано, что среди корней характеристического уравнения системы первого приближения имеется хотя бы один положительный. Следовательно, невозмущенное движение неустойчиво по Ляпунову. Показано, что система полностью управляемая, и невозмущенное движение можно стабилизировать по

первому приближению. Найдены линейный регулятор (наиболее простой из возможных) и условия, при которых невозмущенное движение станет асимптотически устойчивым по Ляпунову независимо от нелинейных членов. Показано, что в процессе движения для изменения программы направления силы тяги достаточно учитывать возмущения только трёх фазовых координат из шести: радиальной и нормальной составляющих скорости и расстояния до неподвижного центра притяжения. Полученные траектории могут быть использованы в качестве опорных при численном интегрировании, а также найти применение при осуществлении конкретных маневров в небесной баллистике.

## ОБСУЖДЕНИЕ

Существует проблема оптимизации движения точки переменной массы (центр масс космического аппарата (КА)) в гравитационных полях. Вариационная задача в постановке Лоудена [1] заключается в определении силы тяги и оптимальных траекторий точки, движущейся с ограниченным секундным расходом массы  $m$  ( $0 \leq m(t) \leq \tilde{m}$ ) и с постоянной относительной скоростью истечения продуктов сгорания  $c$ . Несмотря на актуальность, проблема определения аналитических решений на активных участках в центральных и тем более в нецентральных гравитационных полях до сих пор остается нерешенной. Аналитически полученные результаты имеют ряд преимуществ по сравнению с численно построенными решениями. Они не связаны с вопросами сходимости, содержат важные функциональные зависимости между параметрами, позволяют заранее определить начальные условия при численном моделировании, служат опорными решениями при использовании численных методов.

Метод Лоудена, основанный на введении базис-вектора и функции переключения, позволил нам свести указанную проблему к проблеме интегрирования некоторых замкнутых гамильтоновых систем четырнадцатого порядка по участкам нулевой ( $m=0$ ), промежуточной ( $0 < m < \tilde{m}$ ) и максимальной ( $m = \tilde{m}$ ) тяг [2,3]. Такое обстоятельство дает возможность использовать аппарат аналитической механики, развитый для гамильтоновых систем.

В случае ограниченной задачи трёх тел для участков промежуточной тяги известны только два интеграла. Их недостаточно для определения общего решения дифференциальных уравнений вариационной задачи. Поэтому представляет интерес определение частных интегралов и частных решений.

Одним из методов нахождения частных интегралов является метод Докшевича [4,5], основанный на анализе структуры интегралов, ещё не найденных для данной системы дифференциальных уравнений. Этот метод, не требующий знания интегралов, дал хорошие результаты при определении частных решений для активных участков в различных гравитационных полях. В данной работе для определения новых частных решений используются инвариантные соотношения, полученные нами ранее методом Докшевича [6].

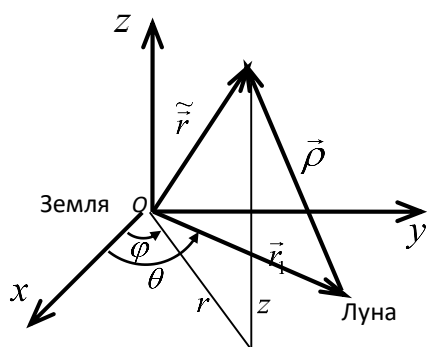


Рис. 1

Точка (центр масс космического аппарата (КА)) переменной массы  $M(t)$  движется в гравитационном поле двух центров притяжения, массы которых  $M_1$  и  $M_2$  соизмеримы ( $M \ll M_2 < M_1$ ), и для удобства названных Землёй и Луной. Точка с массой  $M$  не оказывает воздействия на движение центров притяжения. Предполагается, что Луна движется относительно Земли по известной эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e$  и параметром  $p$

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad \vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_1 \quad (1)$$

Введём геоцентрическую инерциальную систему координат [4]  $xuz$ , начало которой находится в центре Земли, плоскость  $xu$  совпадает с плоскостью орбиты Луны, а оси неизменно ориентированы в пространстве.

Здесь  $\vec{r}$  - геоцентрический радиус-вектор точки (КА),  $\vec{r}_1$  - геоцентрический радиус-вектор Луны. Ось  $Ox$  проходит через перигеум орбиты Луны,  $\theta$  - её истинная аномалия, отсчитывается от направления на перигеум. Будем считать, что при  $t_0 = 0$  Луна находилась на положительной части оси  $Ox$  ( $\theta = 0$ ) в своём перигеуме. Угол  $\theta$  как функцию времени можно найти, используя уравнение Кеплера [7].

Дифференциальное уравнение движения точки имеет следующий вид [6]

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{cm}{M} \vec{e} - \frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} \vec{r} - \frac{\mu_2}{\rho^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{\mu_2}{r_1^3} \vec{r}_1,$$

Здесь  $\vec{e}$  - единичный вектор направления силы тяги,  $\mu_1, \mu_2$  - гравитационные параметры Земли и Луны соответственно. Второе и третье слагаемые справа определяют ускорения, которые сообщаются точке при её движении в центральном поле, создаваемым отдельно Землёй и отдельно Луной. Последнее слагаемое учитывает возмущающее действие Луны [7].

Рассмотрим участки промежуточной тяги (ПТ) задачи о минимизации характеристической скорости [1].

$$V = c \ln \frac{M_0}{M_1}.$$

Введём обозначения:  $v_1, v_2, v_3$  - составляющие скорости  $\vec{v}$  точки в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$  (угол  $\varphi$  отсчитывается от направления на перицентр орбиты Луны);  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1,7}$ ) - множители, сопряженные координатам  $x_i$ :  $v_1, v_2, v_3, r, \varphi, z, M$ ;  $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  - базис-вектор. На участках ПТ ( $0 < t < \tilde{m}$ ),  $\vec{e} = \vec{\lambda}$ .

Дифференциальные уравнения вариационной задачи имеют гамильтонову форму [2]

$$\begin{aligned} \dot{v}_i &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad (i=1,2,3); \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_4}; \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_5}; \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_6}; \quad \dot{M} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_7}, \\ \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial v_i} \quad (i=1,2,3); \quad \dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial r}; \quad \dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}; \quad \dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial z}; \quad \dot{\lambda}_7 = -\frac{\partial H}{\partial M} \end{aligned} \quad (2)$$

с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= \lambda_1 \left( \frac{cm}{M} \lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2}{\rho^3} (r - r_1 \cos \alpha) - \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{v_2^2}{r} \right) + \\ &+ \lambda_2 \left( \frac{cm}{M} \lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3} r_1 \sin \alpha - \frac{\mu_2}{r_1^2} \sin \alpha - \frac{v_1 v_2}{r} \right) + \lambda_3 \left( \frac{cm}{M} \lambda_3 - \frac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 z}{\rho^3} \right) + \\ &+ \lambda_4 v_1 + \lambda_5 \frac{v_2}{r} + \lambda_6 v_3 - \lambda_7 m \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \tilde{r}^2 = r^2 + z^2, \quad \rho^2 = r^2 + z^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \alpha, \quad \alpha = \theta - \varphi. \quad (4)$$

или

$$\dot{v}_1 = \frac{cm}{M} \lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2}{\rho^3} (r - r_1 \cos \alpha) - \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{v_2^2}{r}, \quad (5)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{cm}{M} \lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3} r_1 \sin \alpha - \frac{\mu_2}{r_1^2} \sin \alpha - \frac{v_1 v_2}{r}, \quad (6)$$

$$\dot{v}_3 = \frac{cm}{M} \lambda_3 - \frac{\mu_1 z}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 z}{\rho^3}, \quad (7)$$

$$\dot{r} = v_1; \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r}; \quad \dot{z} = v_3; \quad \dot{M} = -m \quad (8)$$

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \frac{v_2}{r} - \lambda_4; \quad \dot{\lambda}_2 = \frac{1}{r} (\lambda_2 v_1 - 2\lambda_1 v_2 - \lambda_5); \quad \dot{\lambda}_3 = -\lambda_6 \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_4 = & \lambda_1 \left( \frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} + \frac{v_2^2}{r^2} - \frac{3\mu_1 r^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2}{\rho^5} (r - r_1 \cos \alpha)^2 \right) + \\ & + \lambda_2 \left( \frac{3\mu_2 r_1}{\rho^5} \sin \alpha (r - r_1 \cos \alpha) - \frac{v_1 v_2}{r^2} \right) - \lambda_3 \left( \frac{3\mu_1 r z}{\tilde{r}^5} + \frac{3\mu_2 z}{\rho^5} (r - r_1 \cos \alpha) \right) + \lambda_5 \frac{v_2}{r^2} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_5 = & \lambda_1 \mu_2 \sin \alpha \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{r_1}{\rho^3} + \frac{3r_1 r}{\rho^5} (r - r_1 \cos \alpha) \right) + \\ & + \lambda_2 \mu_2 \left( \frac{r_1}{\rho^3} \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{r_1^2} - \frac{3r_1^2 r}{\rho^5} \sin^2 \alpha \right) - \lambda_3 \cdot 3\mu_2 \frac{z r_1 r}{\rho^5} \sin \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{\lambda}_6 = -3\lambda_1 z \left( \frac{\mu_1 r}{r^5} + \frac{\mu_2}{\rho^5} (r - r_1 \cos \alpha) \right) + \lambda_2 \frac{3\mu_2 r_1 z}{\rho^5} \sin \alpha + \lambda_3 \left( \frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} - \frac{3\mu_1 z^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2 z^2}{\rho^5} \right), \quad (12)$$

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{c\dot{m}}{M^2}. \quad (13)$$

Система (2) неавтономная. Для неё известны только два интеграла на участках промежуточной тяги [1;6]

$$\lambda_7 M = c; \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1.$$

Поэтому представляет интерес определение частных интегралов и частных решений. Воспользуемся методом Докшевича. Рассмотрим частный интеграл вида

$$F(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5) = const. \quad (14)$$

Полная производная по времени от функции  $F$  в силу дифференциальных уравнений (2), тождественно равна нулю. Получим следующее линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, которому должна удовлетворять функция  $F$ :



$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial v_1} \left( \frac{cm}{M} \lambda_1 - \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^3} - \frac{\mu_2 b}{\rho^3} - \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{v_2^2}{r} \right) + \\ & + \frac{\partial F}{\partial v_2} \left( \frac{cm}{M} \lambda_2 + \frac{\mu_2}{\rho^3} r_1 \sin \alpha - \frac{\mu_2}{r_1^2} \sin \alpha - \frac{v_1 v_2}{r} \right) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \left( \lambda_2 \frac{v_2}{r} - \lambda_4 \right) + \\ & + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} \cdot \frac{1}{r} (\lambda_2 v_1 - 2\lambda_1 v_2 - \lambda_5) + \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} \left[ \lambda_1 \left( \frac{\mu_1}{\tilde{r}^3} + \frac{\mu_2}{\rho^3} + \frac{v_2^2}{r^2} - \frac{3\mu_1 r^2}{\tilde{r}^5} - \frac{3\mu_2 b^2}{\rho^5} \right) + \right. \\ & + \lambda_2 \left( \frac{3\mu_2 r_1 b}{\rho^5} \sin \alpha - \frac{v_1 v_2}{r^2} \right) - 3\lambda_3 z \left( \frac{\mu_1 r}{\tilde{r}^5} + \frac{\mu_2 b}{\rho^5} \right) + \lambda_5 \frac{v_2}{r^2} \left. \right] + \\ & + \frac{\partial F}{\partial \lambda_5} \left[ \lambda_1 \mu_2 \sin \alpha \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{r_1}{\rho^3} + \frac{3rr_1 b}{\rho^5} \right) + \lambda_2 \mu_2 \left( \frac{r_1}{\rho^3} \cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{r_1^2} - \frac{3rr_1^2}{\rho^5} \sin^2 \alpha \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_3 \cdot 3\mu_2 z \frac{rr_1}{\rho^5} \sin \alpha \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

(15)

Здесь введено обозначение  $b = r - r_1 \cos \alpha$ .

В (15) коэффициенты при величинах, не входящих в интеграл (14), должны быть равны нулю [4]. Получим систему линейных однородных уравнений относительно частных производных

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} \lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial v_2} \lambda_2 = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} \left( \frac{\mu_1 z r}{\tilde{r}^5} + \frac{\mu_2 z b}{\rho^5} \right) - \frac{\partial F}{\partial \lambda_5} \frac{\mu_2 z r r_1}{\rho^5} \sin \alpha = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} r - \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} \lambda_1 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} b - \frac{\partial F}{\partial v_2} r_1 \sin \alpha - \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} \lambda_1 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_5} (\lambda_1 r_1 \sin \alpha - \lambda_2 r_1 \cos \alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_4} (\lambda_1 b^2 - \lambda_2 r_1 b \sin \alpha) - \frac{\partial F}{\partial \lambda_5} (\lambda_1 r_1 r b \sin \alpha - \lambda_2 r_1^2 r \sin^2 \alpha) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v_1} v_2^2 - \frac{\partial F}{\partial v_2} v_1 v_2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \lambda_2 v_2 + \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} (\lambda_2 v_1 - 2\lambda_1 v_2 - \lambda_5) = 0.$$



$$\begin{aligned} & \frac{\partial F}{\partial v_1} \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{\partial F}{\partial v_2} \frac{\mu_2}{r_1^2} \sin \alpha + \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} \lambda_4 - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \lambda_4} \left( \lambda_1 \frac{v_2^2}{r^2} - \lambda_1 \frac{3\mu_1 r^2}{\tilde{r}^5} - \lambda_2 \frac{v_1 v_2}{r^2} + \lambda_5 \frac{v_2}{r^2} \right) - \\ & - \frac{\partial F}{\partial \lambda_5} \frac{\mu_2}{r_1^2} (\lambda_1 \sin \alpha - \lambda_2 \cos \alpha) = 0. \end{aligned}$$

Из второго уравнения следует, что возможны два случая:  $z = 0, z \neq 0$ . Рассмотрим случай  $z = 0$ , то есть, КА движется в плоскости орбиты Луны. Следовательно,  $v_3 = 0, \lambda_3 = 0, \tilde{r} = r$ .

Введём операторы  $X_i(F) = 0$  ( $i = \overline{1,6}$ ) [4], где через  $X_i$  обозначены левые части последней системы. Число операторов  $X_i(F)$  оказалось равным числу переменных в интеграле (14). Следуя методу Докшевича, приравняем определитель линейной системы  $X_i(F) = 0$  ( $i = \overline{1,6}$ ) нулю. Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \lambda_4 (2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5) (\lambda_1 r - \lambda_1 r_1 \cos \alpha - \lambda_2 r_1 \sin \alpha) (\lambda_2 \cos \alpha - \\ & - \lambda_1 \sin \alpha) (\lambda_1 r_1 \sin \alpha - \lambda_2 r_1 \cos \alpha + \lambda_2 r) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Приравнивая выражения в каждой скобке нулю, можно получить инвариантные соотношения, приводящие к различным частным решениям.

1). Пусть в (16) обращаются в нуль одновременно выражения

$$2\lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1 + \lambda_5 = 0 \quad (17)$$

$$\lambda_1 r_1 \sin \alpha - \lambda_2 r_1 \cos \alpha + \lambda_2 r = 0 \quad (18)$$

Тогда из уравнения (9) следует, что  $\dot{\lambda}_2 = 0$ . Из соотношений для базис-вектора:

$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1, \lambda_1 \dot{\lambda}_1 + \lambda_2 \dot{\lambda}_2 = 0$  заключаем, что  $\lambda_1 \dot{\lambda}_1 = 0$ . Возможны два случая:

1.  $\lambda_2 = 0, \lambda_1 = \pm 1$  - тяга радиальная;
2.  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \pm 1$ . - тяга трансверсальная.

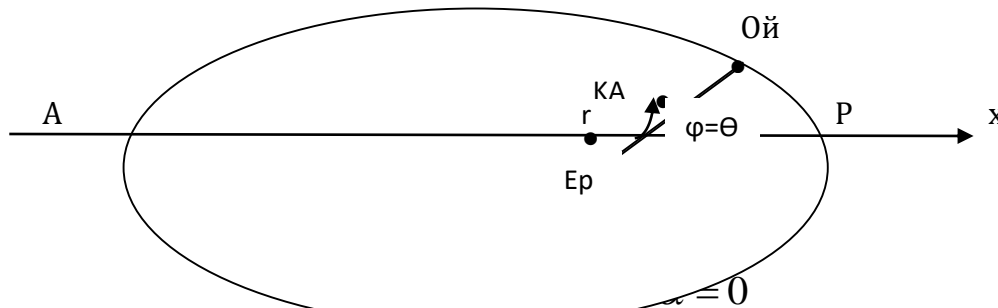
Рассмотрим **первый случай**. Из (18) следует, что  $\sin \alpha = 0$ . КА находится в области между Землёй и Луной. Уравнение (6) сводится к следующему  $\dot{v}_2 = -\frac{v_1 v_2}{r}$  или

$v_2 = \frac{v_{20}}{r} r_0$ . Следовательно, трансверсальная составляющая скорости  $v_2$  изменяется обратно пропорционально расстоянию  $r$  до неподвижного центра (если  $v_{20} > 0$ , то  $v_2 > 0$ ). Так как  $v_2 = r\dot{\phi}$ , то

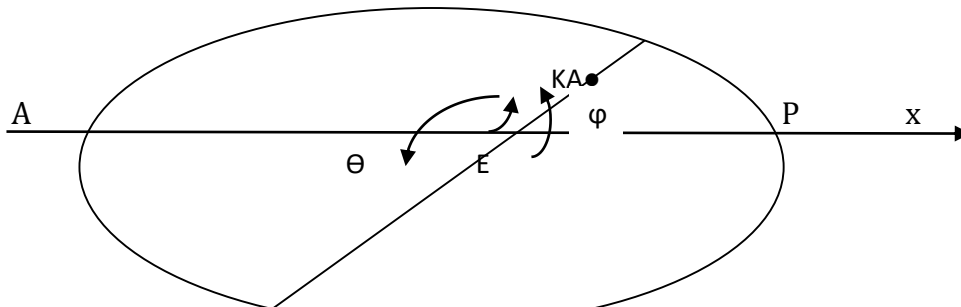
$$\dot{\varphi} = \frac{v_{20} r_0}{r^2}.$$

Угловая скорость точки обратно пропорциональна квадрату расстояния до неподвижного центра.

Если угол рассогласования  $\alpha = 0$ ,  $\theta - \varphi = 0$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varphi}$ , то КА находится на радиусе-векторе Луны. Угловые скорости КА и Луны совпадают.  $\rho = r_1 - r$



Если угол рассогласования  $\alpha = \pi$ ,  $\theta - \varphi = \pi$ , то КА отстаёт (или опережает) от Луны на угол  $\pi$  и находится на прямой, проходящей через центры Земли и Луны (рис. 3).  $\rho = r_1 + r$ . Угловые скорости КА и Луны совпадают.



Найдём траекторию, которой принадлежит найденный участок ПТ.

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu_1 P}}{r_1^2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{P^3}} (1 + e \cos \theta)^2 = \dot{\varphi} \quad (19)$$

$$r^2 = \frac{v_{20} r}{\dot{\theta}} = v_{20} r_0 \sqrt{\frac{P^3}{\mu_1}} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

(20)

Обозначим

$$P = \sqrt{v_{20} r_0 P^4} \sqrt{\frac{P}{\mu_1}} \quad (21)$$

Тогда

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta} \quad (22)$$





Таким образом, КА движется по эллиптической орбите (22) с параметром (21), зависящем от начальных условий  $v_{20}$ ,  $r_0$  и параметра орбиты Луны. **Траектория КА подобна орбите Луны.**

Радиальная составляющая скорости определяется соотношением.

$$v_1 = \dot{r} = \frac{Pe \cos \theta \dot{\theta}}{(1 + e \cos \theta)^2} = P \sqrt{\frac{\mu_1}{p^3}} e \sin \theta = \sqrt{p} \sqrt{v_{20} r_0} \sqrt{\frac{p}{\mu_1}} \frac{\sqrt{\mu_1}}{p \sqrt{p}} e \sin \theta = \sqrt{v_{20} r_0} \sqrt{\frac{\mu_1}{p^3}} e \sin \theta$$

$$\theta = \theta(t)$$

Закон изменения массы можно найти из уравнения (5)

$$\dot{v}_1 = \frac{cm}{M} \lambda_1 - \frac{\mu_1}{r^2} - \frac{\mu_2}{\rho^3} (r - r_1 \cos \alpha) - \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos \alpha + \frac{v_2^2}{r}, \quad \text{где}$$

$$\dot{v}_1 = P \sqrt{\frac{\mu_1}{p^3}} e \cos \theta \frac{\sqrt{\mu_1 p}}{r_1^2} = P \frac{\mu_1}{p} e \frac{\cos \theta}{r_1^2} \quad (23)$$

При  $\lambda_1 = \cos \alpha = 1$   $\rho = r_1 - r$  имеем

$$\frac{cm}{M} = P \frac{\mu_1}{p} e \frac{\cos \theta}{r_1^2} + \frac{\mu_1}{r^2} - \frac{\mu_2}{\rho^2} + \frac{v_{20}^2 r_0^2}{r^3} \quad \text{откуда}$$

$$\frac{dM}{M} = f(\theta, \mu_1, \mu_2, e, p, r_0, v_{20}) d\theta \quad (24)$$

Здесь в правой части – известная функция, зависящая от начальных условий и положения Луны. Для убывания массы необходимо, чтобы функция  $f(\theta)$  была отрицательной. **Масса точки убывает по показательному закону. Таким образом, все величины выражены через истинную аномалию орбиты Луны, являющуюся известной функцией времени.**

При малом эксцентриситете можно использовать приближенную формулу

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu_1}} (\theta - e \sin \theta), \quad (25)$$

выражающую время движения через истинную аномалию Луны  $\theta$ .

**Исследуем полученное движение на устойчивость в случае  $\alpha = \pi$ .**

Невозмущенное движение является следующим

$$v_1 = P \sqrt{\frac{\mu_1}{p^3}} e \sin \theta$$

$$v_2 = \frac{v_{20}}{r} r_0 = \frac{v_{20} r_0}{P} (1 + e \cos \theta), \quad v_3 = 0 \quad (26)$$

$$r = \frac{P}{1 + e \cos \theta}, \quad \varphi = \theta - \pi, \quad z = 0$$



Реактивное ускорение в невозмущенном движении

$$f^* = \frac{cm}{M} = \tilde{f}(\theta) > 0 \quad (27)$$

**В качестве программных управлений возьмём направляющие косинусы реактивной силы и реактивное ускорение**

$$e_1^* = \pm 1, e_2^* = 0, e_3^* = 0, f^* = \tilde{f}(\theta). \quad (28)$$

В соотношениях (26)  $\theta = \theta(t)$  – известная функция времени. Таким образом, невозмущенное движение (26) содержит явно время. Далее рассмотрим случай малого эксцентриситета  $e$ . Например, эксцентриситет орбиты Луны  $e = 0,055$ . Все спутники Юпитера движутся по круговым орбитам  $e = 0$ . Поэтому положим в (26)  $e = 0$ , чтобы исследовать на устойчивость автономную систему. Тогда невозмущенное движение будет следующим:

$$\begin{aligned} v_1 &= 0, \\ v_2 &= v_{20}, \\ v_3 &= 0, \\ r &= r_0, \\ \varphi &= \theta - 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

где  $v_{20} = r_0 \sqrt{\frac{\mu_1}{r_1^3}}$   $r_1 = p$ ;  $r_0 = P = \sqrt{v_{20} r_0^4 \sqrt{\frac{r_1^3}{\mu_1}}}$ .

Из (25) имеем

$$\theta = \sqrt{\frac{\mu_1}{r_1^3}} t = nt$$

Возмущенное движение примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1, \\ v_2 &= v_{20} + x_2, & e_1 &= \pm 1 + u_1, \\ v_3 &= x_3, & e_2 &= u_2, \\ r &= r_0 + x_4, & e_3 &= u_4, \\ \varphi &= nt - \pi + x_5, & f^* &= \tilde{f}(\theta) + u_3. \\ z &= x_6 \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь  $x_i (i = \overline{1,6})$ - отклонения возмущенного движения от невозмущенного;  $u_i (i = \overline{1,4})$ - дополнительные отклонения управлений сверх программ для погашения возмущенного движения и приближения действительного движения к программному.

Уравнения возмущенного движения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\tilde{f} + u_3)(u_1 \pm 1) - \frac{\mu_1(r_0 + x_4)}{\left[(r_0 + x_4)^2 + x_6^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_2(r_0 + x_4 + r_1 \cos x_5)}{\rho^3} + \frac{\mu_2}{r_1^2} \cos x_5 + \frac{(v_{20} + x_2)^2}{r_0 + x_4} \\ \dot{x}_2 = (\tilde{f} + u_3)u_2 + \frac{\mu_2 r_1 \sin(\pi - x_5)}{\rho^3} - \frac{\mu_2}{r_1^2} \sin(\pi - x_5) - \frac{x_1(v_{20} + x_2)}{r_0 + x_4} \\ \dot{x}_3 = (\tilde{f} + u_3)u_4 - \frac{\mu_1 x_6}{\left[(r_0 + x_4)^2 + x_6^2\right]^{3/2}} - \frac{\mu_2 x_6}{\rho^3} \\ \dot{x}_4 = x_1 \\ \dot{x}_5 = -n + \frac{v_{20} + x_2}{r_0 + x_4} \\ \dot{x}_6 = x_3 \end{cases} \quad (31)$$

Уравнения первого приближения можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2D x_2 + E x_4 + \tilde{f}u_1 \pm u_3, \\ \dot{x}_2 &= -D x_1 + F x_5 + \tilde{f}u_2, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{2}(D^2 + E) x_6 + \tilde{f}u_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1, \\ \dot{x}_5 &= \frac{1}{r_0} x_2 - \frac{D}{r_0} x_4, \\ \dot{x}_6 &= x_3. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$D = \frac{v_2}{r_0}, \quad E = \frac{2\mu_1}{r_0^3} + \frac{2\mu_2}{(r_1 + r_0)^3} - D^2; \quad F = \frac{\mu_2 r_1}{(r_0 + r_1)^3} - \frac{\mu_2}{r_1^2} < 0; \quad (33)$$

Уравнения возмущенного движения в матричной форме примут следующий вид

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B\bar{u} + \bar{g}(x, u), \quad (34)$$

где  $\bar{g}(x, u)$  - члены порядка выше первого относительно  $x, u$ .

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \tilde{f} & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & \tilde{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2D & 0 & E & 0 & 0 \\ -D & 0 & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{D^2 + E}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} & 0 & -\frac{D}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

При  $\bar{u} = 0$  имеем задачу об устойчивости по Ляпунову невозмущенного движения  $x_i = 0$  ( $i = \overline{1,6}$ )



$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}(x).$$

Составим характеристическое уравнение системы первого приближения

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$$

$$|A - sE| = 0 \quad (35)$$

$$\begin{vmatrix} -s & 2D & 0 & E & 0 & 0 \\ -D & -s & 0 & 0 & F & 0 \\ 0 & 0 & -s & 0 & 0 & -\frac{D^2 + E}{2} \\ 1 & 0 & 0 & -s & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0} & 0 & -\frac{D}{r_0} & -s & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left( s^2 + \frac{1}{2}(D^2 + E) \right) \left( s^4 + \left( 2D^2 - E - \frac{F}{r_0} \right) s^2 + \frac{F}{r_0}(E + 2D^2) \right) = 0. \quad (36)$$

Характеристическое уравнение распалось на два уравнения:

первое

$$s^2 + \frac{1}{2}(D^2 + E) = 0$$

имеет два чисто мнимых корня. Второе уравнение – биквадратное. Его дискриминант

$$\left( E + \frac{F}{r_0} - 2D^2 \right)^2 - 4 \frac{F}{r_0} (E + 2D^2) > 0,$$

в силу (33), положительный ( $F < 0$ ,  $E + 2D^2 > 0$ ). Следовательно, среди корней характеристического уравнения (35) есть хотя бы один действительный положительный корень.

Известно, что если хотя бы один из корней характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то невозмущенное движение неустойчиво по первому приближению[8].

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Таким образом, рассматриваемое движение (28,29) неустойчиво по Ляпунову по первому приближению. Возникает задача о стабилизации невозмущенного движения (28,29), то есть задача о выборе такого регулятора  $\vec{u}(t, x)$ , при

подстановке которого в уравнения (32) невозмущенное движение стало бы асимптотически устойчивым по Ляпунову [9]. Это возможно, если система (34) управляемая. Воспользуемся следующим критерием управляемости и стабилизации по первому приближению [9].

Система (34) полностью управляема по первому приближению в том и только в том случае, если матрица

$$W = \| B, AB, \dots, A^5 B \| \quad (37)$$

имеет ранг, равный 6 (порядок системы (34)). Нетрудно проверить, что в нашем случае ранг матрицы  $W$  равен 6. Поэтому существует линейный регулятор

$$\vec{u} = P \vec{x} \quad (38)$$

и вопрос о стабилизации решается по линейному приближению

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (A + BP)\vec{x}.$$

Постоянная действительная матрица  $P$  должна быть такой, чтобы невозмущенное движение системы

$$\dot{\vec{x}} = (A + BP)\vec{x} + \vec{g}(x, u)$$

было асимптотически устойчиво, то есть чтобы действительные части всех собственных значений матрицы  $A + BP$  были отрицательными. Этому условию будет удовлетворять, например, следующая матрица  $P$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Матрица  $P$  выбиралась из условия, чтобы не только действительные части собственных значений матрицы  $A + BP$  были отрицательными, но и чтобы она была по возможности наиболее простой. Если убрать любой из элементов матрицы (39), то среди корней характеристического уравнения системы первого приближения

$$|A + BP - sE| = 0 \quad (40)$$

появится корень с положительной (или с нулевой) действительной частью. Характеристическое уравнение (40) распадается на два уравнения:

первое

$$s^2 - \tilde{f}p_{43}s + \frac{1}{2}(D^2 + E) = 0,$$

корни которого при условии

$$p_{43} < 0 \quad (41)$$

имеют отрицательные действительные части, и второе:

$$s^4 - \tilde{f}p_{11}s^3 + (2D^2 - \tilde{f}p_{14} - E - \frac{F}{r_0})s^2 + \frac{F}{r_0}(\tilde{f}p_{11}s + \tilde{f}p_{14} + E + 2D^2) = 0$$

(42)

корни которого будут иметь отрицательные действительные части при выполнении следующих условий:

$$p_{11} < 0; \quad p_{14} < -\frac{1}{\tilde{f}} \left( \frac{v_{20}^2}{r_0^2} + \frac{2\mu_1}{r_0^3} + \frac{2\mu_2}{(r_1 + r_0)^3} \right) \quad (43)$$

Таким образом, стабилизирующее управление (линейный регулятор) построен

$$\begin{aligned} u_1 &= p_{11}x_1 + p_{14}x_4 = p_{11}v_1 + p_{14}r, \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= 0, \\ u_4 &= p_{43}x_3 = p_{43}v_3, \end{aligned} \quad (44)$$

где, коэффициенты (элементы матрицы (39))  $p_{11}, p_{14}, p_{43}$  удовлетворяют найденным выше условиям.

## ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Таким образом, для стабилизации невозмущенного движения необходимо изменять программу направления силы тяги, а именно изменять программу направляющих косинусов  $e_1, e_3$ . В процессе движения достаточно учитывать возмущения только трех фазовых координат  $v_1, v_3, r$ .

Добавляя к программному управлению (28) регулятор (44), получим систему с обратной связью. Поскольку рассматривается участок промежуточной тяги, где масса изменяется непрерывно, то возможно непрерывное осуществление этой обратной связи. Теперь направление реактивной силы в каждый момент времени формируется с учетом дополнительной информации, поступающей в орган управления в процессе движения. Это обстоятельство создает возможность не допустить отклонения фазовых координат в какой-нибудь отдельный момент времени от программного значения на величину большую допустимой.

## Использованная литература:

1. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. - М.: Мир. 1966.
2. Азизов А.Г., Коршунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета. - Учебное пособие. - Т.: ТашГУ, 1991. - 84 с.
3. Azizov A.G., Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // Celestial Mech.-1986.-V.38. № 4. - С. 297-306.
4. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. - М.: Наука. 1977. - 314 с.

5. Докшевич А.И. О четвертом интеграле в задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. – В сб.: Интегрирование некоторых дифф. уравнений мат. физики.- Ташкент: ФАН, 1964.- С. 104-116.
6. Коршунова Н.А., Шерниёзов Х.О. Стабилизация движения точки на участках промежуточной тяги в случае ограниченной задачи трёх тел// Узб.журнал «Проблемы механики».- 2014, № 2.-С.5-8.
7. Охоцимский Д.Е. Сихарулидзе Ю.Г. Основы механики космического полета.- М.: Наука. 1990.- 448 с.
8. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения.-М.: Наука. 1987.-304 с.
9. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // ПММ.1963. Т. XXVII. Вып. 6.