ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ. ПРИЗНАК ДАЛАМБЕРА. ПРИЗНАКИ КОШИ

Зияйев Умрзоқ Муродович
Ташкентский химико-технологический институт, филиал Шарисабиз
ziyaevumrzoq@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.8080895

Аннотация: *Данная статья посвящена изучению признаков сходимости рядов. В статье рассматриваются необходимые и достаточные условия сходимости рядов, включая признаки Даламбера, Коши, Раабе и другие. Также в статье приводятся примеры применения данных признаков для определения сходимости рядов. Статья предназначена для студентов и исследователей, которые интересуются теорией рядов и их сходимостью. В ней дается подробное описание каждого признака сходимости рядов, а также объяснение, как и когда их использовать. Кроме того, приводятся примеры, которые помогут читателям лучше понять материал. В целом, данная статья является полезным ресурсом для всех, кто хочет углубить свои знания в области теории рядов и научиться применять признаки сходимости для анализа рядов.*
Ключевые слова: *ряды, признаки Даламбера, Коши, Раабе, абсолютная и условная сходимость, знакопостоянные и знакопеременные ряды, анализ рядов.*

Annotatsiya: *Ushbu maqola qatorlarning yaqinlashuv belgilarini o'rganishga bag'ishlangan. Maqolada qatorlarni yaqinlashtirish uchun zarur va etarli shart-sharoitlar, jumladan, d'Alembert, Koshi, Raabe va boshqalar testlari muhokama qilinadi. Maqolada qatorlarning yaqinlashuvini aniqlash uchun ushbu xususiyatlardan foydalanish misollari ham keltirilgan. Maqola qatorlar nazariyasi va ularning yaqinlashuvi bilan qiziquvchi talabalar va tadqiqotchilar uchun mo'ljallangan. Unda har bir turkum konvergentsiya mezonining batafsil tavsifi, shuningdek, ularni qanday va qachon ishlatish haqida tushuntirish berilgan. Bundan tashqari, o'quvchilarga materialni yaxshiroq tushunishga yordam beradigan misollar keltirilgan. Umuman olganda, ushbu maqola seriyalar nazariyasi sohasidagi bilimlarini chuqurlashtirishni va ketma-ket tahlil qilish uchun konvergentsiya mezonlarini qanday qo'llashni o'rganishni istagan har bir kishi uchun foydali manbadir.*

Kalit so'zlar: *qator, d'Alember, Koshi, Raabe testlari, mutlaq va shartli yaqinlashish, doimiy va o'zgaruvchan belgilar qatori, qatorlar tahlili.*

Abstract: *This article is devoted to the study of signs of convergence of series. The article discusses the necessary and sufficient conditions for the convergence of series, including the d'Alembert, Cauchy, Raabe and others tests. The article also provides examples of the use of these features to determine the convergence of series. The article is intended for students and researchers who are interested in the theory of series and their convergence. It provides a detailed description of each series convergence criterion, as well as an explanation of how and when to use them. In addition, examples are provided to help readers understand the material better. In general, this article is a useful resource for anyone who wants to deepen their knowledge in the field of series theory and learn how to apply convergence criteria for series analysis.*

Keywords: *series, d'Alembert, Cauchy, Raabe tests, absolute and conditional convergence, series of constant and alternating signs, analysis of series.*

Признак сходимости Даламбера

Радикальный признак сходимости Коши (сразу ссылки для опытных читателей)

Интегральный признак сходимости Коши

Одним из распространенных признаков сравнения, который встречается в практических примерах, является признак Даламбера. Признаки Коши встречаются реже, но тоже весьма популярны. Как всегда, постараюсь изложить материал просто, доступно и понятно. Тема не самая сложная, и все задания в известной степени трафаретны.

Признак сходимости Даламбера

Жан Лерон Даламбер – это знаменитый французский математик 18-го века. Вообще, Даламбер специализировался на дифференциальных уравнениях и на основании своих исследований занимался баллистикой, чтобы у Его Величества лучше летали пушечные ядра. Заодно и про числовые ряды не забыл, не зря потом шеренги наполеоновских войск так четко сходились и расходились.

Перед тем как сформулировать сам признак, рассмотрим важный вопрос: Когда нужно применять признак сходимости Даламбера?

Сначала начнем с повторения. Вспомним случаи, когда нужно применять самый ходовой предельный признак сравнения. Предельный признак сравнения применяется тогда, когда в общем члене ряда:

1) В знаменателе находится многочлен.

2) Многочлены находятся и в числителе и в знаменателе.

3) Один или оба многочлена могут быть под корнем.

4) Многочленов и корней, разумеется, может быть и больше.

Основные же предпосылки для применения признака Даламбера следующие:

1) В общий член ряда («начинку» ряда) входит какое-нибудь число в степени, например, 2^n, 3^n, 5^n *и так далее. Причем, совершенно не важно, где эта штуковина располагается, в числителе или в знаменателе – важно, что она там присутствует.*

2) В общий член ряда входит факториал. С факториалами мы скрестили шпаги ещё на уроке Числовая последовательность и её предел. Впрочем, не помешает снова раскинуть скатерть-самобранку:

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

...

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)$

...

! При использовании признака Даламбера нам как раз придется расписывать факториал подробно. Как и в предыдущем пункте, факториал может располагаться вверху или внизу дроби.

3) Если в общем члене ряда есть «цепочка множителей», например, $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$*. Этот случай встречается редко, но! При исследовании такого ряда часто допускают ошибку – см. Пример 6.*

Вместе со степенями или (и) факториалами в начинке ряда часто встречаются многочлены, это не меняет дела – нужно использовать признак Даламбера.

Кроме того, в общем члене ряда может встретиться одновременно и степень и факториал; может встретиться два факториала, две степени, важно чтобы там находилось хоть что-то из рассмотренных пунктов – и это как раз предпосылка для использования признака Даламбера.

Признак Даламбера: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему:* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ *, то:*

а) При $D<1$ *ряд сходится. В частности, ряд сходится при* $D=0$*.*

б) При $D>1$ *ряд расходится. В частности, ряд расходится при* $D=\infty$*.*

в) При $D=1$ *признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак. Чаще всего единица получается в том случае, когда признак Даламбера пытаются применить там, где нужно использовать предельный признак сравнения.*

У кого до сих пор проблемы с пределами или недопонимание пределов, обратитесь к уроку Пределы. Примеры решений. Без понимания предела и умения раскрывать неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ *дальше, к сожалению, не продвинуться.*

А сейчас долгожданные примеры.

Пример 1

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$

Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n *, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера. Сначала полное решение и образец оформления, комментарии ниже.*

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\dfrac{n^2+n-1}{4^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot\left(n^2+2n+1+n+1-1\right)}{4\cdot4^n\cdot\left(n^2+n-1\right)}\overset{(4)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{n^2+3n+1}{n^2}}{\dfrac{n^2+n-1}{n^2}}\right)\overset{(6)}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\overset{\to0}{\dfrac{3}{n}}+\overset{\to0}{\dfrac{1}{n^2}}}{1+\overset{\to0}{\dfrac{1}{n}}-\overset{\to0}{\dfrac{1}{n^2}}}\right)\overset{(7)}{=}\frac{1}{4}\cdot1=\frac{1}{4}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

(1) Составляем отношение следующего члена ряда к предыдущему: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *. Из условия мы видим, что общий член ряда* $a_n=\frac{n^2+n-1}{4^n}$ *. Для того, чтобы получить следующий член ряда нужно ВМЕСТО* n *подставить* $n+1$*:* $a_{n+1}=\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}$ *.*
(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби. При определенном опыте решения этот шаг можно пропускать.
(3) В числителе раскрываем скобки. В знаменателе выносим четверку из степени.
(4) Сокращаем на 4^n*. Константу* $\frac{1}{4}$ *выносим за знак предела. В числителе в скобках приводим подобные слагаемые.*
(5) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ *устраняется стандартным способом – делением числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.*
(6) Почленно делим числители на знаменатели, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.
(7) Упрощаем ответ и делаем пометку, что $\frac{1}{4}<1$ *с выводом о том, что, по признаку Даламбера исследуемый ряд сходится.*
В рассмотренном примере в общем члене ряда у нас встретился многочлен 2-й степени. Что делать, если там многочлен 3-й, 4-й или более высокой степени? Дело в том, что если дан многочлен более высокой степени, то возникнут трудности с раскрытием скобок. В этом случае можно применять «турбо»-метод решения.
Пример 2
Возьмём похожий ряд и исследуем его на сходимость
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}$$
Сначала полное решение, потом комментарии:

IBAST | Volume 3, Issue 6, June

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^4-(n+1)^2+3}{4^{n+1}\cdot(n+1+1)}}{\dfrac{n^4-n^2+3}{4^n\cdot(n+1)}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^4-(n+1)^2+3)\cdot(n+1)}{4^{n+1}\cdot(n^4-n^2+3)\cdot(n+2)}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^4-(n+1)^2+3)\cdot(n+1)}{4\cdot 4^n\cdot(n^4-n^2+3)\cdot(n+2)}=\frac{1}{4}<1$$

1 1

Одного порядка роста

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

(1) Составляем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *.*
(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.
(3) Рассмотрим выражение $(n+1)^4-(n+1)^2+3$ *в числителе и выражение* n^4-n^2+3 *в знаменателе. Мы видим, что в числителе нужно раскрывать скобки и возводить в четвертую степень:* $(n+1)^4$ *, чего делать совершенно не хочется. А для тех, кто не знаком с биномом Ньютона, эта задача окажется ещё сложнее. Проанализируем старшие степени: если мы вверху раскроем скобки* $(n+1)^4-(n+1)^2+3$*, то получим старшую степень* n^4 *. Внизу у нас такая же старшая степень:* n^4 *. По аналогии с предыдущим примером, очевидно, что при почленном делении числителя и знаменателя на* n^4 *у нас в пределе получится единица. Или, как говорят математики, многочлены* $(n+1)^4-(n+1)^2+3$ *и* n^4-n^2+3 *– одного порядка роста. Таким образом, вполне можно обвести отношение* $\frac{(n+1)^4-(n+1)^2+3}{n^4-n^2+3}$ *простым карандашом и сразу указать, что эта штука стремится к единице. Аналогично расправляемся со второй парой многочленов:* $n+1$ *и* $n+2$*, они тоже одного порядка роста, и их отношение стремится к единице.*
На самом деле, такую «халтуру» можно было провернуть и в Примере № 1, но для многочлена 2-й степени такое решение смотрится всё-таки как-то несолидно. Лично я поступаю так: если есть многочлен (или многочлены) первой или второй степени, я использую «длинный» способ решения Примера 1. Если попадается многочлен 3-й и более высоких степеней, я использую «турбо»-метод по образцу Примера 2.
Пример 3

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$
Полное решение и образец оформления в конце урока
Рассмотрим типовые примеры с факториалами:
Пример 4

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$

В общий член ряда входит и степень, и факториал. Ясно, как день, что здесь надо использовать признак Даламбера. Решаем.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot(n+5)\cdot(n+2)!}{7\cdot 7^n\cdot(n+6)\cdot(n+1)!}\overset{(3)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot(n+5)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{7\cdot 7^n\cdot(n+6)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}\overset{(4)}{=}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)\cdot(n+2)}{7\cdot(n+6)}\overset{(5)}{=}$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+7n+10}{n+6}=\frac{\infty}{\infty}\overset{(6)}{=}\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^2+7n+10}{n^2}}{\frac{n+6}{n^2}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{7}{n}^{\to 0}+\frac{10}{n^2}^{\to 0}}{\frac{1}{n}^{\to 0}+\frac{6}{n^2}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0}=\frac{1}{7}\cdot\infty=\infty>1$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

(1) Составляем отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Повторяем еще раз. По условию общий член ряда:* $a_n=\frac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^n}$. *Для того чтобы получить следующий член ряда, вместо* n *нужно подставить* $n+1$, *таким образом:* $a_{n+1}=\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}$.

(2) Избавляемся от четырехэтажности дроби.

(3) Отщипываем семерку от степени. Факториалы расписываем подробно. Как это сделать – см. начало урока или статью о числовых последовательностях.

(4) Сокращаем всё, что можно сократить.

(5) Константу $\frac{1}{7}$ *выносим за знак предела. В числителе раскрываем скобки.*

(6) Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ *устраняем стандартным способом – делением числителя и знаменателя на «эн» в старшей степени.*

Пример 5

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$

Полное решение и образец оформления в конце урока

Пример 6

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$

Иногда встречаются ряды, которые в своей начинке содержат «цепь» множителей, этот тип ряда мы еще не рассматривали. Как исследовать ряд с «цепочкой» *множителей? Использовать признак Даламбера. Но сначала для понимания происходящего распишем ряд подробно:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{1\cdot 3}+\frac{2^3}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2^4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}+\ldots$$

Из разложения мы видим, что у каждого следующего члена ряда добавляется дополнительный множитель в знаменателе, поэтому, если общий член ряда $a_n=\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}$*, то следующий член ряда:* $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2(n+1)-1)}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n+1)}$*. Вот здесь часто автоматом допускают ошибку, формально по алгоритму записывая, что* $a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot\cancel{(2(n+1)-1)}}$

Примерный образец решения может выглядеть так:

Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2(n+1)-1)}}{\dfrac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2\cdot 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)\cdot 2^n}=2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Радикальный признак Коши

Огюстен Луи Коши – еще более знаменитый французский математик. Биографию Коши вам может рассказать любой студент технической специальности. В самых живописных красках. Не случайно эта фамилия высечена на первом этаже Эйфелевой башни.

Признак сходимости Коши для положительных числовых рядов чем-то похож на только что рассмотренный признак Даламбера.

Радикальный признак Коши: Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$*. Если существует предел:* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=D$*, то:*

а) При $D<1$ *ряд сходится. В частности, ряд сходится при* $D=0$*.*

б) При $D>1$ *ряд расходится. В частности, ряд расходится при* $D=\infty$*.*

в) При $D=1$ *признак не дает ответа. Нужно использовать другой признак. Интересно отметить, что если признак Коши не даёт нам ответа на вопрос о сходимости ряда, то признак Даламбера тоже не даст ответа. Но если признак Даламбера не даёт ответа, то признак Коши вполне может «сработать». То есть, признак Коши является в этом смысле более сильным признаком.*

Когда нужно использовать радикальный признак Коши? Радикальный признак Коши обычно использует в тех случаях, когда корень $\sqrt[n]{a_n}$ «хорошо» извлекается из общего члена ряда. Как правило, этот перец находится в степени, которая зависит от n. Есть еще экзотические случаи, но ими голову забивать не будем.

Пример 7

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$

Мы видим, что дробь полностью находится под степенью, зависящей от «эн», а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}\overset{(2)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{\frac{3n+2}{n}}\overset{(3)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3+\frac{2}{n}^{\to 0}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{5}{n}^{\to 0}}\right)^{3}\overset{(6)}{=}\left(\frac{7}{6}\right)^{3}=\frac{343}{216}>1$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

(1) Оформляем общий член ряда под корень.

(2) Переписываем то же самое, только уже без корня, используя свойство степеней $\sqrt[b]{x^{a}}=x^{\frac{a}{b}}$.

(3) В показателе почленно делим числитель на знаменатель, указывая, что $\frac{2}{n}^{\to 0}$

(4) В результате у нас получилась неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}$. *Здесь можно было пойти длинным путем: возвести $7n+1$ в куб, возвести $6n+5$ в куб, потом разделить числитель и знаменатель на «эн» в кубе. Но в данном случае есть более эффективное решение: этот приём можно использовать прямо под степенью-константой. Для устранения неопределенности делим числитель и знаменатель на n (старшую степень многочленов).*

(5) Выполняем почленное деление, и указываем слагаемые, которые стремятся к нулю.

(6) Доводим ответ до ума, помечаем, что $\frac{343}{216}>1$ *и делаем вывод о том, что ряд расходится.*

А вот более простой пример для самостоятельного решения:

Пример 8

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n}$

И еще пара типовых примеров.

Полное решение и образец оформления в конце урока

Пример 9

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}$
Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} \overset{(1)}{=} \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}} \overset{(2)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{\frac{n^2+2n+1}{n}} \overset{(3)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{n+2+\frac{1}{n}^{\to 0}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} \overset{(4)}{=}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{5n-1}{n}}{\frac{6n+7}{n}}\right)^{n+2} \overset{(5)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\frac{1}{n}^{\to 0}}{6+\frac{7}{n}^{\to 0}}\right)^{n+2} \overset{(6)}{=} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2} \overset{(7)}{=} 0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.
(1) Помещаем общий член ряда под корень.
(2) Переписываем то же самое, но уже без корня, при этом раскрываем скобки, используя формулу сокращенного умножения: $(n+1)^2 = n^2+2n+1$.
(3) В показателе почленно делим числитель на знаменатель и указываем, что $\frac{1}{n}^{\to 0}$.
(4) Получена неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$*, и здесь тоже можно выполнять деление прямо под степенью. Но с одним условием: коэффициенты при старших степенях многочленов должны быть разными. У нас они разные (5 и 6), и поэтому можно (и нужно) разделить оба этажа на* n*. Если же эти коэффициенты одинаковы, например (1 и 1):* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+7}\right)^{n+2}$*, то такой фокус не проходит и нужно использовать второй замечательный предел. Если помните, эти тонкости рассматривались в последнем параграфе статьи Методы решения пределов.*
(5) Собственно выполняем почленное деление и указываем, какие слагаемые у нас стремятся к нулю.
(6) Неопределенность устранена, у нас остался простейший предел: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}$.
Почему $\frac{5}{6}$ *в бесконечно большой степени стремится к нулю? Потому что основание степени удовлетворяет неравенству* $0<\frac{5}{6}<1$*. Если у кого есть сомнения в справедливости предела* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}=0$*, то я не поленюсь, возьму в руки калькулятор:*

Если $n=1$*, то* $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 0,5787$

Если $n=2$*, то* $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,4823$

Если $n=5$, *то* $\left(\frac{5}{6}\right)^7 \approx 0{,}2791$

Если $n=10$, *то* $\left(\frac{5}{6}\right)^{12} \approx 0{,}1122$

Если $n=20$, *то* $\left(\frac{5}{6}\right)^{22} \approx 0{,}0181$

… и т.д. до бесконечности – то есть, в пределе: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+2}=0$

Прямо таки бесконечно убывающая геометрическая прогрессия на пальцах =) ! Никогда не используйте этот приём в качестве доказательства! Ибо если что-то очевидно, то это ещё не значит, что это правильно.

(7) Указываем, что $0<1$ *и делаем вывод о том, что ряд сходится.*

Пример 10

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$

Это пример для самостоятельного решения.

Иногда для решения предлагается провокационный пример, например: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{2}$. *Здесь в показателе степени нет «эн», только константа. Тут нужно возвести в квадрат числитель и знаменатель (получатся многочлены), а далее придерживаться алгоритма из статьи Ряды для чайников. В подобном примере сработать должен либо необходимый признак сходимости ряда либо предельный признак сравнения.*

Интегральный признак Коши

Или просто интегральный признак. Разочарую тех, кто плохо усвоил материал первого курса. Для того чтобы применять интегральный признак Коши необходимо более или менее уверенно уметь находить производные, интегралы, а также иметь навык вычисления несобственного интеграла первого рода.

В учебниках по математическому анализу интегральный признак Коши дан математически строго, но слишком уж поморочено, поэтому я сформулирую признак не слишком строго, но понятно:

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$. *Если существует несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty}a_x dx$, *то ряд сходится или расходится вместе с этим интегралом.*

И сразу примеры для пояснения:

Пример 11

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

Почти классика. Натуральный логарифм и какая-нибудь бяка.

Основной предпосылкой использования интегрального признака Коши является тот факт, что в общем члене ряда содержатся множители, похожие на некоторую функцию и её производную. Из темы Производная вы наверняка запомнили простейшую табличную вещь: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$*, и у нас как раз такой каноничный случай.*

Как использовать интегральный признак? Сначала берем значок интеграла и переписываем со «счётчика» ряда верхний и нижний пределы: $\int\limits_2^{+\infty}$*. Затем под интегралом переписываем «начинку» ряда с буковкой «хэ»:* $\int\limits_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}$*. Чего-то не хватает..., ах, да, еще в числителе нужно прилепить значок дифференциала:* $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$*.*

Теперь нужно вычислить несобственный интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$*. При этом возможно два случая:*

1) Если выяснится, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ *сходится, то будет сходиться и наш ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$*.*

2) Если выяснится, что интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ *расходится, то наш ряд* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ *тоже будет расходиться.*

Повторюсь, если материал запущен, то чтение параграфа будет трудным и малопонятным, поскольку применение признака по сути дела сводится к вычислению несобственного интеграла первого рода.

Полное решение и оформление примера должно выглядеть примерно так:

Используем интегральный признак:

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = (*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[2;+\infty)$

$$(*) = \int\limits_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln|\ln x|\right)\Big|_2^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\ln b^{\to+\infty} - \ln\ln 2\right) = +\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример 12

Исследовать ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$

Решение и образец оформления в конце урока

В рассмотренных примерах логарифм также мог находиться под корнем, это не изменило бы способа решения.
И еще два примера на закуску
Пример 13

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}}$

По общим «параметрам» общий член ряда подходит для использования предельного признака сравнения. Нужно всего лишь раскрыть скобки $(2n+3)^7$ *и сразу сдать на кандидата предельно сравнить данный ряд со сходящимся рядом* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{n^7}}$ *. Впрочем, я немного слукавил, скобки можно и не раскрывать, но всё равно решение через предельный признак будет выглядеть несколько вычурно.*
Поэтому мы используем интегральный признак Коши:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[6]{(2x+3)^7}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$

$$=\int_1^{+\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(2x+3)^{-\frac{7}{6}}d(2x+3)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[6]{(2x+3)}}\right)\Bigg|_1^b=-3\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{\sqrt[6]{(2b+3)}}}^{\to 0}-\frac{1}{\sqrt[6]{5}}\right)=\frac{3}{\sqrt[6]{5}}$$

Получено конечное число, значит, исследуемый ряд сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

! Примечание: полученное число $\frac{3}{\sqrt[6]{5}}$ *– не является суммой ряда!!!*
Пример 14

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$

Решение и образец оформления в конце урока, который подходит к концу.
Да. Возможно, у некоторых возник вопрос, почему я начал этот урок с таким энтузиазмом? Всё просто – начался учебный год, а мне не нужно на учебу!!! Я столько мучался =(Что даже не устал в заключительных аккордах этой статьи.
В целях окончательного и бесповоротного усвоения темы числовых рядов посетите урок Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Примеры решений.
Желаю успехов!
Решения и ответы:

Пример 3: Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1+1}}{\sqrt{3(n+1)+5}}}{\dfrac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1+1}\cdot\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{3(n+1)+5}}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+5}}{2^{n+1}\cdot\sqrt{3n+8}}=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3n+5}{3n+8}}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{\dfrac{3n+5}{n}}{\dfrac{3n+8}{n}}}=2\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{3+\dfrac{5}{n}^{\to 0}}{3+\dfrac{8}{n}^{\to 0}}}=2\cdot\sqrt{1}=2>1$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

Примечание: Можно было использовать и «турбо»-метод решения: сразу обвести карандашом отношение $\dfrac{\sqrt{3n+5}}{\sqrt{3n+8}}$, *указать, что оно стремится к единице и сделать пометку: «одного порядка роста».*

Пример 5: Используем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{5^n}{n!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{5^{n+1}\cdot n!}{5^n\cdot(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{5\cdot 5^n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{5^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)}=5\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=5\cdot 0=0<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Пример 8: Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3n+2}=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n+1}{n}}{\dfrac{3n+2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}^{\to 0}}{3+\dfrac{2}{n}^{\to 0}}=\frac{1}{3}<1$$

Таким образом, исследуемый ряд сходится.

Пример 10: Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^{\frac{n^2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5n+4}{2n-1}\right)^n=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\dfrac{5n+4}{n}}{\dfrac{2n-1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5+\dfrac{4}{n}^{\to 0}}{2-\dfrac{1}{n}^{\to 0}}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty>1$$

IBAST | Volume 3, Issue 6, June

Таким образом, исследуемый ряд расходится.

Примечание: Здесь основание степени $\frac{5}{2}>1$ *, поэтому* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$

Пример 12: Используем интегральный признак:.

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\int_1^{+\infty}\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^3(x+1)}=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln^2(x+1)}\right)\Big|_1^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\overbrace{\frac{1}{\ln^2(b+1)}}^{\to 0}-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{\ln^2 2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}$$

Получено конечное число, значит, исследуемый ряд сходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Пример 14: Используем интегральный признак:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{(5x-1)^2}}=(*)$$

Подынтегральная функция непрерывна на $[1;+\infty)$.

$$(*)=\int_1^{+\infty}(5x-1)^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{5}\int_1^{+\infty}(5x-1)^{-\frac{2}{3}}d(5x-1)=\frac{3}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(\sqrt[3]{5x-1}\right)\Big|_1^b=$$

$$=\frac{3}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(\overbrace{\sqrt[3]{5b-1}}^{\to+\infty}-\sqrt[3]{4}\right)=\frac{3}{5}\left(+\infty-\sqrt[3]{4}\right)=+\infty$$

Таким образом, исследуемый ряд расходится вместе с соответствующим несобственным интегралом.

Примечание: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}$ *также можно исследовать с помощью предельного признака сравнения. Для этого удобно раскрыть скобки под корнем и сравнить исследуемый ряд с расходящимся рядом*

Литература:

1.Киселёв, Андрей Петрович // Большая советская энциклопедия : [в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. — 3-е изд. — М. : Советская энциклопедия, 1969—1978.

2.Андронов И. К., А. П. Киселев. [Некролог], «Математика в школе», 1941, № 2

3.Маргулис А. Я., Андрей Петрович Киселев, «Математика в школе», 1948, № 4

4.Депман И. Я., История арифметики, М., 1959.

5.Моргулис А. Я., Тростников В. Законодатель школьной математики // Наука и жизнь. 1968. № 1

6.Пыльнев-Рогачёв, Лунёва М. И. Служитель «царицы-наук» // Кольцовский сквер. 2002. № 3.