
# 0* - АЛГЕБРА ОТНОСИТЕЛЬНО СУБАДДИТИВНЫХ МЕР

**Кодиров Комилжон Ракимович**
Ферганский Государственный Университет
Кандидат физико-математических наук, доцент
Tel: +998904075594 e-mail: kkodirov65@mail.ru
**Тўхтасинов Тохиржон Шокиржон ўғли**
Преподаватель кафедры математики Ферганского государственного университета
Tel: +998905828689 e-mail: toxirjontoxtasinov13@gmail.com
**Зайнололобидинова Хумора Рахмиддин қизи**
Студент Ферганского государственного университета
https://doi.org/10.5281/zenodo.8036273

**Аннотация**

*В статье доказано, что * - алгебра $L_m$ всех m – измеримых операторов относительно субаддитивной меры, определенной на алгебре фон Неймана, является $0^*$ - алгеброй.*

**Ключевые слова:** *логика, проектор, топология, алгебра, эрмитовой часть, оператор, мера, спектр.*

Пусть **M** – алгебра фон Неймана, $\nabla$ - логика проекторов **M**, *m* – субаддитивная мера на **M**. Множество *m* – измеримых операторов обозначим через $L_m$ .

Напомним, что в $L_m$ определена топология сходимости по мере *m* и $L_m$ является * - алгеброй относительно этой топологии [1].

Определим порядок на эрмитовой части $(L_m)_{sa}$ * - алгебры $L_m$.

**Определение.** Элемент $T \in (L_m)_{sa}$ назовем положительным, если $(T\xi, \xi) \geq 0$ для всех $\xi \in D(T)$, и будем считать, что $T \leq S$, если $(S - T)$ - положительный оператор $T, S \in (L_m)_{sa}$.

Этот порядок согласован с алгебраическими операциями.

**Теорема.** * - алгебра $L_m$ – всех *m* – измеримых операторов относительно алгебры фон Неймана **M**, действующей в гильбертовом пространстве H, является $0^*$-алгеброй. Множество ограниченных элементов в $L_m$ совпадает с **M**.

**Доказательство**. Условия 1),2) и 4) определения 1.23[1] доказываются простым вычислением. Проверим выполнение условия

3). Если $T, S \in (L_m)_{sa}$ и $T \geq 0$, $S \geq 0$, то существуют положительные квадратные корни $\sqrt{T}$ и $\sqrt{S}$ .

При этом верно, что $\sqrt{T}\sqrt{S} = \sqrt{S}\,\sqrt{T}$, если $TS = ST$. Далее, множество ограниченных элементов в $L_m$ совпадает с **M**. В самом деле, если $T \in (L_m)_{sa}$ и $0 \leq T \leq 1$, то для любого $\xi \in D(T)$ $\| T\xi \|^2 = (T\xi, \xi) \leq (\xi, \xi) = \| \xi \|^2$. Следовательно, оператор

$\sqrt{T}$ , а вместо с ними оператор $T$ ограничены. Это означает, что множество всех ограниченных элементов в $L_m$ совпадает с алгеброй фон Неймана **M.**

Покажем, что для $L_m$ выполняется аксиома (I) из определение $0^*$ - алгебры.

Пусть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$ - возрастающая ограниченная сверху сеть операторов из $(L_m)_{sa}$. Будем считать, что $0\le T_\alpha \le S$ для всех $\alpha\in I$ где $S\in(L_m)_{sa}$, $S\ge 1$. Так как $(S\xi,\xi)\ge(\xi,\xi)$ для любого $\xi\in D(S)$, то $S$ является инъекцией. Поэтому существует обратный оператор $S^{-1}$ с областью определения $D(S^{-1})=\{S\xi;\ \xi\in D(S)\}$. Если $(S\xi,\eta)=0$ для любого $\xi\in D(S)$, *то* $\eta\in D(S^*)$ *и* $S^*\eta=0$. Но $S^*=S$, следовательно, $\eta\in D(S)$ *и* $S\eta=0$, т. е. $\eta=0$. Это означает, что $\overline{D(S^{-1})}=H$. Тогда $(S^{-1})^*=(S^*)^{-1}=S^{-1}$ т.е. $S^{-1}$- положительно определенный самосопряженный оператор в $H$. Поэтому существует $\sqrt{S^{-1}}$ и если $\eta=S\xi,\ \xi\in D(S)$, то

$$\left(S^{-1}\eta,\eta\right)=\left(\sqrt{S^{-1}}\eta,\sqrt{S^{-1}}\eta\right)\le\left(S\sqrt{S^{-1}}\eta,\sqrt{S^{-1}}\eta\right)=(\eta,\eta).$$

Следовательно, $0\le S^{-1}\le 1$ и поэтому $S^{-1}\in B(H)$. Так как $S^{-1}U\eta=US^{-1}\eta$ для любого $\eta\in D(S^{-1})$ и унитарного оператора $U\in M$, то $S^{-1}\in M$. Если $T\in(L_m)_{sa}$ и $T\ge 0$, то
$$\sqrt{S^{-1}}T\ \sqrt{S^{-1}}-\left(\sqrt{T}\ \sqrt{S^{-1}}\right)^*\left(\sqrt{T}\sqrt{S^{-1}}\right)\ge 0.$$

Так как отображение $T\to\sqrt{S^{-1}}T\ \sqrt{S^{-1}}$ из $(L_m)_{sa}$ в $L_m$ сохраняет порядок, то положим $B_\alpha=\sqrt{S^{-1}}T_\alpha\ \sqrt{S^{-1}}$. Тогда $\{B_\alpha\}$ - возрастающая сеть из **M** и $0\le B_\alpha\le 1$ для всех $\alpha\in I$. Алгебра фон Неймана монотонно полна, поэтому в **M** существует $B=\sup\limits_\alpha B_\alpha$. Если $B_0\in(L_m)_{sa}$ и $B_0\ge B_\alpha\ \ \forall\alpha\in I$, то

$$(B_0\xi,\xi)\ge\lim_\alpha(B_\alpha\xi,\xi)=(B\xi,\xi),\quad \xi\in D(B_0).$$

Следовательно, $B$ есть точная верхняя грань в $(L_m)_{sa}$ для сети $\{B_\alpha\}$. Но $\sqrt{S^{-1}}=\left(\sqrt{S}\right)^{-1}$, поэтому отображение $T\to\sqrt{S}T\ \sqrt{S}$ из $(L_m)_{sa}$ в $(L_m)_{sa}$ является биекцией и сохраняет порядок. Это означает, что оператор $T=\sqrt{S}\ B\sqrt{S}$ есть точная верхняя грань в $(L_m)_{sa}$ для сети $\{T_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Отсюда следует, что $\sup\limits_\alpha PT_\alpha P=PTP$ для любого $P\in\nabla$. Следовательно, $PTP+P^\perp TP^\perp=\sup\limits_\alpha PT_\alpha P+\sup\limits_\alpha P^\perp T_\alpha P^\perp=$

$$=\sup_{\alpha}(PT_{\alpha}P+P^{\perp}T_{\alpha}P^{\perp})=\sup_{\alpha}T_{\alpha}=T$$

Отсюда $PT=TP$. Теперь используя опять следствие 2.6. [1], получим, что *TC=CT*, если только $T_{\alpha}C=CT_{\alpha}$, $\alpha\in I$ где $C\in L_m$. Таким образом $L_m$ удовлетворяет аксиоме (I).

Пусть $N\subset L_m$ - максимальная коммутативная подалгебра в $L_m$.

Покажем, что эрмитова часть $N_{sa}$ является решеткой относительно индуцированного частичного порядка. Достаточно показать, что для каждого $T\in N_{sa}$ существует $T\nabla 0$, так как $T\nabla S=((T-S)\nabla 0)+S$ для любого $T,S\in N_{sa}$. Пусть $T\in N_{sa}$ и $\{P(\lambda)\}$-спектральное семейство проекторов для *T*. Положим $T_0=TP^{\perp}(0)=P^{\perp}(0)T$. Тогда $T_0\in N_{sa}$ и $T_0\xi=\int_0^{\infty}\lambda dP(\lambda)\xi$ для любого $\xi\in D(T_0)$. В частности,

$$(T_0\xi,\xi)=\int_0^{\infty}\lambda d(P(\lambda)\xi,\xi)\geq 0,\quad \xi\in D(T_0)$$

и $((T-T_0)\xi,\xi)=(P(0)T\xi,\xi)=\int_0^{\infty}\lambda d(P(\lambda)P(0)\xi,P(0)\xi)==\int_0^{\infty}\lambda d(P(\lambda)\xi,\xi)\leq 0$

т.е. $T_0\geq 0$ и $T_0\geq T$. Пусть $S\in N_{sa}$, $S\geq 0$, $S\geq T$, тогда

$P(0)S=P(0)SP(0)\geq 0,\ P^{\perp}S\geq P^{\perp}(0)TP^{\perp}(0)=T_0$,

и
$$S=P^{\perp}(0)S+P(0)S\geq T_0$$

Следовательно, $T_0=T\vee 0$ в $N_{sa}$, т.е. $N_{sa}$ - решетка. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим $(L_m)_{sa}$ - эрмитову часть $L_m$. Она, очевидно, является йордановой алгеброй относительно умножения $x\circ y=\frac{1}{2}(xy+yx)$. Оказывается, в этой йордановой алгебре, как и для случая *JW* – алгебр, совместность и операторная коммутируемость совпадают [1].

**Следствие .** Йорданова алгебра $E=(L_m)_{sa}$ является топологической *OJ* – алгеброй, относительно топологии сходимости по мере. Множество ограниченных элементов *E* совпадает с *JW* – алгеброй $\mathbf{M}_{sa}$.

## Literature:

1. Кодиров К., Йигиталиев Й. Топология сходимости по мере на-алгебрах //Экономика и социум. – 2020. – №. 1. – С. 491-495.
2. Кодиров К., Йигиталиев Й. Инновационный метод обучения высшей математике //Экономика и социум. – 2020. – №. 4. – С. 71.

3. Kodirov K. R., Nishonbaev A. S. On the scientific basis of forming students' logical competence //ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. – 2021. – T. 11. – №. 3. – С. 123-128.
4. Raximovich K. K. et al. Some Methods for Solving Fourth-Order Equations //International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. – 2022. – Т. 2. – №. 4. – С. 127-130.
5. Kodirov K. R. et al. COMPETENCE-BASED APPROACH IN TEACHING SOME ELEMENTS OF MATHEMATICS LESSON DESIGN METHODOLOGY //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2020. – Т. 2. – №. 9. – С. 390-394.
6. Кодиров К., Йигиталиев Й. ФИНАНСОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКОЙ //Экономика и социум. – 2020. – №. 4. – С. 435-438.
7. Кодиров К., Йигиталиев Й. -ИЗМЕРИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА-АЛГЕБРАХ //Экономика и социум. – 2020. – №. 1. – С. 485-490.
8. Komiljon K., Yuldoshali Y. Subadditive measure on projectors of von neumann algebra //International Journal on Integrated Education. – Т. 3. – №. 1. – С. 26-28.
9. Komiljon K., Yuldoshali Y., Begzod S. Communication of sab additive measures on Jordan banach algebra //International Journal on Integrated Education. – Т. 3. – №. 1. – С. 29-31.
10. Raximovich, K. K., & Shokirjon o'g'li, T. T. (2022). OJ-ALGEBRA OF MEASURABLE ELEMENTS WITH RESPECT TO A SUBADDITIVE MEASURE ON JORDAN ALGEBRAS. European Journal of Interdisciplinary Research and Development, 4, 19-21.
11. Khursanalievich, K. U., Ugli, T. T. S., & Askarali, M. (2022). DRAWING AND IMAGE MODELS TOOL MATH LEARNING OPTIONS. American Journal of Applied Science and Technology, 2(09), 26-34.
12. Kodirov, K., Nishonboyev, A., Ruzikov, M., & Tuxtasinov, T. (2022). SUBADDITIVE MEASURE ON VON NEUMANN ALGEBRAS. International scientific journal of Biruni, 1(2), 134-139.
13. Кодиров, К. Р., Тухтасинов, Т. Ш., & Йўлдошали, Й. У. (2021). Связь топологии сходимости по мере на алгебрах Фон Неймана. Вестник магистратуры, 7.
14. Abdumannopov, M. M., Akhmedov, O. U., & Tokhtasinov, T. (2022). ESSENTIAL MODES FOR ACTIVATING MASTERING SUBJECTS AT SCHOOLS. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 3(12), 1-4.
15. Nishonboyev, A., Tukhtasinov, T., & Ro'zikov, M. (2023). WAYS TO FORM INDEPENDENT THINKING OF STUDENTS IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS. International Bulletin of Medical Sciences and Clinical Research, 3(3), 49-51.
16. Рузиков, М. (2022). Уч ўлчовли Лаплас тенгламаси учун ярим чексиз параллелепипедда нолокал чегаравий масала. Yosh Tadqiqotchi Jurnali, 1(5), 128-137.
17. Kodirov, K., Nishonboyev, A., Ruzikov, M., & Alimov, Z. (2022). Formation of students'knowledge and skills in the educational process based on the active approach. International scientific journal of Biruni, 1(2), 339-344.