



СУБАДДИТИВНЫЕ МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ.

Кодиров Комилжон Рахимович

Ферганский Государственный Университет
Кандидат физико-математических наук, доцент
Tel: +998904075594 e-mail: kkodirov65@mail.ru

Тўхтасинов Тохиржон Шокиржон ўғли
Преподаватель кафедры математики Ферганского
государственного университета

Tel: +998905828689 e-mail: toxirjontoxtasinov13@gmail.com

Зайнололобидинова Хумора Рахмиддин қизи
Студент Ферганского государственного университета
<https://doi.org/10.5281/zenodo.8036201>

Аннотация

В данной статье рассмотрены примеры субаддитивных мер в пространствах измеримых функции и доказано, что любая субаддитивная мера продолжается до полуаддитивной функции на R^2 .

Ключевые слова: пространства, алгебра, субаддитивная мера, полуаддитивная функция, последовательность.

Пусть (X, F) измеримое пространство, т.е. X некоторое множество, а $F \subset 2^X$ некоторая σ -алгебра.

Определение. Отображение $m: X \rightarrow R^+$ называется субаддитивной мерой на X , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $m(\emptyset) = 0, m(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset$
- 2) $A \subset B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$ для $A, B \in F$.
- 3) $m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$ для $A, B \in F$.
- 4) Если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ - возрастающая последовательность измеримых множеств и $A = \bigcup_n A_n$, то $m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n)$.

Пример 1. Любая мера μ в X является субаддитивной мерой. Докажем это.

Выполнение условий 1), 2) и 4) очевидно. Проверим выполнение условия 3).

Действительно, если $A \cap B = \emptyset$ то, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Для любого $A, B \in F$, $\mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

2. Пусть μ - мера X со свойством $\mu(X) = 1$. Тогда $m(A) = \sqrt{\mu(A)}$ - является субаддитивной мерой.

Непосредственно проверяется выполнение условий 1), 2) и 5). Покажем выполнение условие 3).

$$\begin{aligned} m(A \cup B) &= \sqrt{\mu(A \cup B)} = \sqrt{\mu(A \cup (B \setminus A))} = \\ &= \sqrt{\mu(A) + \mu(B \setminus A)} \leq \sqrt{\mu(A)} \leq \sqrt{\mu(B)} = m(A) + m(B) \end{aligned}$$

Пусть μ - мера в X . γ - функция R^+ в R^+ со следующими свойствами:

- (i) $\gamma(0) = 0, \gamma(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$
- (ii) $x \leq y \Rightarrow \gamma(x) \leq \gamma(y), \forall x, y > 0$
- (iii) $\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y), \forall x, y > 0$
- (iv) $x_n \uparrow x \Rightarrow \gamma(x_n) \uparrow \gamma(x).$

Такие функции назовем полуаддитивными на R . Тогда

$$m(A) = \gamma(\mu(A)) \quad (1)$$

является субаддитивной мерой.

Из последнего примера возникает вопрос: всякая ли субаддитивная мера имеет вид (1), для некоторой γ ?

Теорема. Пусть (X, F) - измеримое пространство, μ - непрерывная мера Лебега на X . Тогда любая субаддитивная мера m имеет вид: $m(A) = \gamma(\mu(A))$, для любого $A \in F$ и некоторой полуаддитивной функции γ на R^+ .

Доказательство. Для любого $a \in R^+$ определим $\gamma(a)$ следующим образом:

$$\gamma(a) = \begin{cases} m(A) & \text{если } a = \mu(A) \text{ для некоторого } A \in F \\ m(X) & \text{противном случае} \end{cases}.$$

Покажем, что $\gamma: R^+ \rightarrow R^+$ полуаддитивная функция. Свойство (i) очевидно.

(ii) Пусть $x \leq y$. Покажем, что $\gamma(x) \leq \gamma(y)$. Возможны следующие варианты:

а) $x = \mu(A_1), y = \mu(A_2)$ для некоторых $A_1, A_2 \in F$. Такие как $x \leq y$, т.е. $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$, то существует $G \subset A_2$ такое, что $\mu(G) = \mu(A_1) = x$. Отсюда $\gamma(x) = m(A_1) = m(G)$,

$$\gamma(y) = m(A_2) = m(G \cup (A_2 \setminus G)) \geq m(G) = \gamma(x).$$

б) $x = \mu(A_1)$ для некоторого $A_1 \in F$, $y \neq \mu(A_2)$ для любого $A_2 \in F$. Тогда

$$\gamma(x) = m(A_1) \leq m(X) = \gamma(y).$$

с) $x \neq \mu(A_1)$ для любого $A_1 \in F$, $y = \mu(A_2)$ для некоторого $A_2 \in F$. Из неравенства $x \leq y$ имеем, что $\mu(A_2) \geq x$. По непрерывности меры это означает, что существует $A_1 \in F$ такое, что $x = \mu(A_1)$ и утверждение получается как в случае а).

д) $x \neq \mu(A_1), y \neq \mu(A_2)$ для любых $A_1, A_2 \in F$. В этом случае $\gamma(y) = \gamma(x) = m(X)$.

(iii). Покажем, что $\gamma(x + y) \leq \gamma(x) + \gamma(y)$.

а) $x = \mu(A_1), y = \mu(A_2)$, для некоторых $A_1, A_2 \in F$.

Здесь возможны два случая:



$$1) x + y \leq \mu(X) \quad \text{и} \quad 2) x + y \geq \mu(X).$$

Доказательство проведем для каждого случая по отдельности.

$$1) \quad \text{Пусть } x + y \leq \mu(X), \text{ т.е. } \mu(A_1) + \mu(A_2) \leq \mu(X).$$

Если обозначим через $C = A_1 \cap A_2$, то имеем, что

$$\mu(C) \leq \mu((X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)).$$

Это означает, что существует множество

$$D \subset (X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)$$

с условием $\mu(C) = \mu(D)$ и $\mu((A_2 \setminus A_1) \cup D) = \mu(A_2)$

Отсюда имеем, что

$$x + y = \mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup D).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma(x + y) &= m(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup D) \leq \\ &\leq m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1 \cup D) = m(A_1) + m(A_2) = \gamma(x) + \gamma(y). \end{aligned}$$

$$2) \quad \text{Пусть } x + y \geq \mu(X), \text{ т.е. } \mu(A_1) + \mu(A_2) \geq \mu(X). \text{ Это означает, что } \mu(C) \geq \mu((X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2)).$$

В этом случае $\gamma(x + y) = m(X)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma(x + y) &= m(X) = m(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \\ &\cup ((X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2))) \leq m(A_1) + m(A_2 \setminus A_1 \cup ((X \setminus A_1) \cap (X \setminus A_2))) \leq \\ &\leq m(A_1) + m(A_2) = \gamma(x) + \gamma(y). \end{aligned}$$

б) $x = \mu(A_1)$ для некоторого $A_1 \in F$, $y \neq \mu(A_2)$ для любого A_2 . Тогда $x + y \neq \mu(C)$ для любого $C \in F$. Поэтому

$$\gamma(x + y) = \mu(X) \leq m(A_1) + m(X).$$

с) $x \neq \mu(A_1)$ для любого $A_1 \in F$, $y = \mu(A_2)$ для некоторого $A_2 \in F$. В этом случае $\gamma(x + y) \leq m(x) + m(A_2)$.

д) $x \neq \mu(A_1)$, $y \neq \mu(A_2)$ для любых $A_1, A_2 \in F$. Тогда $x + y \neq \mu(C)$ для любого $C \in F$. Поэтому

$$\gamma(x + y) = m(x) \leq m(x) + m(x) = \gamma(x) + \gamma(y).$$

(IV) непосредственно вытекает из нормальности меры и субаддитивных мер. Теорема доказана.

В случае, когда X – дискретное множество, тогда теорема неверна, т. е. не существует полуаддитивная функция, для которой выполняется: $m(A) = \gamma(\mu(A))$, для любого $A \in F$.

Пример 2. Пусть $A \in F$. $X = \{A_i\}_{i \in I}$, где I не более чем счетно. Пусть

на $F = 2^X$ задана мера μ и субаддитивная мера m и $\mu(\{A_i\}) = c_i$, $m(\{A_i\}) = d_i$, $i = 1, 2, \dots$

Предположим, что существует полуаддитивная функция γ такая, что $m(A) = \gamma(\mu(A))$ для всех $A \in F$. Для простоты считаем, что мера μ равномерная, т. е. $c_i = c_j = C$ для всех i и j . Субаддитивную меру m можно выбрать так, что вообще говоря $d_i \neq d_j$, при $i \neq j$. Из предположения вытекает, что $d_i = \gamma(c_i) = \gamma(c_j) = d_j$. Противоречие.

Это означает, что субаддитивная мера m не может быть произвольной, т. е. m также должна быть равномерной.

Заключение: Для произвольных дискретных мер и произвольных субаддитивных мер заданных на измеримом пространстве, вообще говоря, не существует их связывающей полуаддитивной функции..

Литература:

1. Кодиров К., Йигиталиев Й. Топология сходимости по мере на-алгебрах //Экономика и социум. – 2020. – №. 1. – С. 491-495.
2. Кодиров К., Йигиталиев Й. Инновационный метод обучения высшей математике //Экономика и социум. – 2020. – №. 4. – С. 71.
3. Kodirov K. R., Nishonbaev A. S. On the scientific basis of forming students' logical competence //ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal. – 2021. – Т. 11. – №. 3. – С. 123-128.
4. Raximovich K. K. et al. Some Methods for Solving Fourth-Order Equations //International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. – 2022. – Т. 2. – №. 4. – С. 127-130.
5. Kodirov K. R. et al. COMPETENCE-BASED APPROACH IN TEACHING SOME ELEMENTS OF MATHEMATICS LESSON DESIGN METHODOLOGY //Scientific Bulletin of Namangan State University. – 2020. – Т. 2. – №. 9. – С. 390-394.
6. Кодиров К., Йигиталиев Й. ФИНАНСОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ С ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКОЙ //Экономика и социум. – 2020. – №. 4. – С. 435-438.
7. Кодиров К., Йигиталиев Й. -ИЗМЕРИМЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА-АЛГЕБРАХ //Экономика и социум. – 2020. – №. 1. – С. 485-490.
8. Komiljon K., Yuldoshali Y. Subadditive measure on projectors of von neumann algebra //International Journal on Integrated Education. – Т. 3. – №. 1. – С. 26-28.
9. Komiljon K., Yuldoshali Y., Begzod S. Communication of sab additive measures on Jordan banach algebra //International Journal on Integrated Education. – Т. 3. – №. 1. – С. 29-31.
10. Raximovich, K. K., & Shokirjon o'g'li, T. T. (2022). OJ-ALGEBRA OF MEASURABLE ELEMENTS WITH RESPECT TO A SUBADDITIVE MEASURE ON JORDAN ALGEBRAS. European Journal of Interdisciplinary Research and Development, 4, 19-21.
11. Khursanalievich, K. U., Ugli, T. T. S., & Askarali, M. (2022). DRAWING AND IMAGE MODELS TOOL MATH LEARNING OPTIONS. American Journal of Applied Science and Technology, 2(09), 26-34.

12. Kodirov, K., Nishonboyev, A., Ruzikov, M., & Tuxtasinov, T. (2022). SUBADDITIVE MEASURE ON VON NEUMANN ALGEBRAS. International scientific journal of Biruni, 1(2), 134-139.
13. Кодиров, К. Р., Тухтасинов, Т. Ш., & Йўлдошали, Й. У. (2021). Связь топологии сходимости по мере на алгебрах Фон Неймана. Вестник магистратуры, 7.
14. Abdumannopov, M. M., Akhmedov, O. U., & Tokhtasinov, T. (2022). ESSENTIAL MODES FOR ACTIVATING MASTERING SUBJECTS AT SCHOOLS. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 3(12), 1-4.
15. Nishonboyev, A., Tukhtasinov, T., & Ro'zikov, M. (2023). WAYS TO FORM INDEPENDENT THINKING OF STUDENTS IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS. International Bulletin of Medical Sciences and Clinical Research, 3(3), 49-51.
16. Рузиков, М. (2022). Уч ўлчовли Лаплас тенгламаси учун ярим чексиз параллелепипедда нолокал чегаравий масала. Yosh Tadqiqotchi Jurnal, 1(5), 128-137.
17. Kodirov, K., Nishonboyev, A., Ruzikov, M., & Alimov, Z. (2022). Formation of students' knowledge and skills in the educational process based on the active approach. International scientific journal of Biruni, 1(2), 339-344.