ИЗОМЕТРИИ ВНЕШНИХ LOG-АЛГЕБР, ПОСТРОЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО σ - КОНЕЧНЫХ МЕР

Мадаминов Бекзод Аллаёрович
(PhD Ургенчского государственного университета.)
Эгамов Севинчбек Махсуд ўғли
(Магистр Ургенчского государственного университета)
https://doi.org/10.5281/zenodo.8004022

Аннотация. В настоящей статье вводится внешные понятие log-алгебр , которые являются *F*-пространствами функций интегрируемых с логарифмом. В теоремы доказано необходимое и достаточное условие изометричности этих *F*-пространств.

Annotation. In this paper, we introduce a generalized concept of log-algebras, which are *F*-spaces of functions integrable with a logarithm. In the last theorem, a necessary and sufficient condition for the isometricity of these *F*-spaces is proved.

Ключевые слова: *log*-алгебры, *F*-пространства, строгоположительные конечные меры, изометрии.

Keywords: *log*-algebras, *F*-spaces, strictly positive finite measures, isometries.

Одним из важных классов Банаховых функциональных пространств являются пространства $L_p(\Omega, \mathrm{A}, \mu)$, $1 \le p < \infty$ всех функций заданных на измеримом пространстве $(\Omega, \mathrm{A}, \mu)$ интегрируемых с $p-$той степенью относительно конечной меры μ (функции совпадающие почти всюду отождествляются). Изучение изометрий L_p пространства начато Банахом, который описал все изометрии пространств $L_p[0,1]$, $p \ne 2$.

Последние результаты в этом направлении были получены Йедоном [1] , который полностью описал все изометрии L_p-пространств построенных по различным мерам.

В настоящей статье рассматриваются пространства комплекснозначных функций интегрируемых с логарифмом $L_{\log}(\Omega, \mathrm{A}, \mu)$ и их изометрии. Эти пространства рассматривались в работах [2],[3],[4].
Интерес к этим пространствам вызван тем, что они близки к классу функций

Неванлинна N голоморфных в круге и интегрируемых с логарифмом на границе круга [5] , т.е. удовлетворяющих условию

$$L(f) := \sup_{r<1} \frac{1}{2\pi} \int \log(1+\left|f(re^{io})\right| do) < \infty \quad .$$

Так как логарифм от голоморфной функции будет субгармонической функцией, то можно сказать, что класс Неванлинна устанавливает связь между голоморфными функциями и теорией потенциалов. Известно [5], что существует инъективный гомоморфизм Φ из N в $L_p(T,m)$, где m мера Хаара на единичном круге. Функция $\|f\|_N = \|\Phi(f)\|_{\log}$ является F – нормой на N.

Определение 1. *Булевой алгеброй* называется дистрибутивная решетка с неравными друг другу единицей **1** и нулем **0**, в которой всякий элемент имеет дополнение.

Таким образом, булева алгебра всегда содержит не менее двух элементов. Алгебра, содержащая только **0** и **1**, называется вырожденной.

Определение 2. Булева алгебра называется *полной*, если всякое множество ее элементов имеет верхнюю и нижнюю грани.

Определение 3. Сильнейшая среди топологий, удовлетворяющих условию (O), называется (o) – топологией.

Пусть X –произвольная полная булева алгебра, $e \in X$, $X_e = [0,e] = \{g \in X : g \le e\}$. Через $\tau(X_e)$ обозначим минимальную мощность множества, плотного в X_e в (о)-топологии.

Определение 4. Бесконечная полная булева алгебра X называется *однородной*, если $\tau(X_e) = \tau(X_g)$ для любых ненулевых $e, g \in X$.

Определение 5. Мера μ на булевой алгебре ∇_μ называется *строго положительной*, если из $\mu(x) = 0$ следует, что $x = 0$.

В настоящем параграфе доказывается критерий изометричности функциональных log-алгебр, построенных по различным строго положительным σ-конечным мерам. Рассматриваемые log-алгебры являются содержательными примерами полуполей. Отдельно рассматриваются внешние, внутренние и обобщенные log-алгебры. При этом существенно используется теорема Магарам и понятие паспорта [6].

Пусть ∇ полная неатомическая булева алгебра и μ – строго положительная счетно аддитивная σ-конечная мера на ∇. Тогда разложение ∇ на однородные компоненты не более чем счетно.

Определение 6. Обозначим через $\{\nabla_{s_i}\}$ однородные компоненты булевой алгебры ∇, для которых

$$\tau_{s_i} = \tau(\nabla_{s_i}) < \tau_{s_{i+1}},\ \mu(s_i) = \infty,$$

а через $\{\nabla_{u_i}\}$ обозначим однородные компоненты булевой алгебры ∇, для которых $\tau_{u_i} = \tau(\nabla_{u_i}) < \tau_{u_{i+1}},\ \mu(u_i) < \infty$. Здесь s_i и u_i единицы булевых алгебр

∇_{s_i} и ∇_{u_i}, соответственно.Тогда однозначно определена матрица

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \dots \\ \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix},$$

которую назовем *паспортом* булевой алгебры ∇ с σ-конечной мерой μ.[94].

В случае конечной меры получим определение паспорта нормированной булевой алгебры, введенной в [6].

Пусть (G, *B* ,ν) – пространство со строго положительной σ-конечной мерой ν. Обозначим это пространство через ∇_ν.

Пусть ∇_μ и ∇_ν (вообще говоря различные) булевы алгебры со строго положительными мерами μ и ν, соответствено.

Теорема 1. [4]. Пусть ∇_μ и ∇_ν–неоднородны и не совпадают, меры μ и ν σ-конечны. Пары (∇_μ,μ) и (∇_ν,ν) изоморфны тогда и только тогда, когда паспорта булевых алгебр (∇_μ,μ) и (∇_ν,ν)

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \dots \\ \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tau_{s_1'} & \tau_{s_2'} & \dots \\ \tau_{u_1'} & \tau_{u_2'} & \dots \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots \end{pmatrix}$$

совпадают.

В следующей теореме дается необходимо и достаточно условие изоморфности *log*-алгебр $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}(\nabla_\nu)$, заданных с помощью σ – конечных мер.

Теорема 2. [3]. Пусть μ и ν–строго положительные σ-конечные меры на неатомических полных булевых алгебрых ∇_μ и ∇_ν соответственно. Пусть

$$\begin{pmatrix} \tau_{s_1} & \tau_{s_2} & \dots \\ \tau_{u_1} & \tau_{u_2} & \dots \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \tau_{s_1'} & \tau_{s_2'} & \dots \\ \tau_{u_1'} & \tau_{u_2'} & \dots \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots \end{pmatrix}$$

паспорта булевых алгебр (∇_μ,μ) и (∇_ν,ν). Тогда следующие условия эквивалентны

(i) *-алгебр $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}(\nabla_\nu)$ *-изоморфны;

(ii) Первые и вторые строки паспортов ∇_μ и ∇_ν – совпадают и последовательности $\frac{\mu_i}{\nu_i}$ и $\frac{\nu_i}{\mu_i}$ ограничны.

В следующей теореме дается необходимо и достаточно условие изометричности F-пространств $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}(\nabla_\nu)$, заданных с помощью конечных мер.

Теорема 3. Пусть ∇_μ и ∇_ν – различные полные неатомические однородные булевы алгебры с конечными строго положительными мерами μ и ν. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $L_{log}(\nabla_\mu)$ $и$ $L_{log}(\nabla_\nu)$ изометричны;

(ii) а) Веса $\tau(\nabla_\mu)$ и $\tau(\nabla_\nu)$ совпадают;

б) $\mu(u)=\nu(u')$, где u и u' – единицы булевых алгебр ∇_μ и ∇_ν, соответственно.

Доказательство. $(i)\Rightarrow(ii)$. Пусть не выполнено $(ii)a)$, тогда однородные булевы алгебры ∇_μ и ∇_ν имеют различные веса. Поэтому между ними нет взаимнооднозначного соответствия. Следовательно F – пространства $L_{log}(\nabla_\mu)$ и $L_{log}(\nabla_\nu)$ не изометричны.

Если не выполнено условие $(ii)б)$, тогда из теоремы 5 [1] получаем, что булевы алгебры не ∇_μ и ∇_ν изометричны.

$(ii)\Rightarrow(i)$.Пусть выполнено условие (ii). Тогда из следует, что существует сохраняющий меру изоморфизм из (∇_μ,μ) и (∇_ν,ν), т.е. $\mu(x)=\nu(\alpha(x))$ для любых $x\in\nabla_\mu$ [6] (теорема 5, стр.273). Обозначим через J_α изоморфизм алгебры $L_\circ(\nabla_\mu)$ на $L_\circ(\nabla_\nu)$ такой, что $J_\alpha(x)=\alpha(x)$ для любых $x\in\nabla_\mu$. Из [1] (proposition 3) для любых $f\in L_{log}(\nabla_\mu)$ имеем

$$\| f\|_{log,\mu}=\int\limits_\Omega log(1+|f(\omega)|)d\mu=\int\limits_\Omega J_\alpha(log(1+|f(\omega)|))d\nu$$

$$= \int_{\Omega} (log(1+|J_{\alpha} f(\omega)|)) d\nu = \| J_{\alpha} f(\omega) \|_{log,\nu}.$$

Отсюда получаем что J_{α} является биективной линейной изометрией из $L_{log}(\nabla_{\mu})$ на $L_{log}(\nabla_{\nu})$. □

Теорема 4. Пусть $\nabla_{\mu} \neq \nabla_{\nu}$ полные неатомические однородные булевы алгебры с $\sigma -$конечными, но не конечными строго положительными мерами μ и ν. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) $L_{log}(\nabla_{\mu})$ *и* $L_{log}(\nabla_{\nu})$ изометричны;

(ii) Веса $\tau(\nabla_{\mu})$ и $\tau(\nabla_{\nu})$ совпадают.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Пусть $L_{log}(\nabla_{\mu})$ и $L_{log}(\nabla_{\nu})$ изометричны, тогда существует взаимно однозначное соответствие между булевыми алгебрами ∇_{μ} и ∇_{ν}, т.е. веса этих алгебр совпадают.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $\tau(\nabla_{\mu}) = \tau(\nabla_{\nu})$ и $\{\nabla_{\mu} e_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\nabla_{\nu} f_i\}_{n=1}^{\infty}$ дизюнктное различие булевых алгебр ∇_{μ} и ∇_{ν} соответственно, при этом e_i на f_i можно выбрать так, чтобы $\mu(e_i) = \nu(f_i) = 1 \quad i = 1,2,...$ При каждом i существует сохранящий меру изоморфизм φ_i булевой алгебры $\nabla_{\mu} e_i$ на $\nabla_{\nu} f_i$ Ясно, что отображенные φ определенное равенством $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x \wedge e_n)$, есть сохранящий меру изоморфизм из ∇_{μ} на ∇_{ν}. Также как и в доказательстве теоремы 5 (*ii*) отсюда получаем, что $L_{log}(\nabla_{\mu})$ и $L_{log}(\nabla_{\nu})$ изометричны.

References:

1. Yeadon F.J. Isometries of non-commutative spaces.Math. Proc.Camb. Phil. Soc. 90 (1981), pp. 41-50.
2. Dykema K., Sukochev F., Zanin D. Algebras of log-integrable functions and operators, Journal, Complex Anal. Oper. Theory 10, (8), (2016), pp. 1775–1787.
3. Abdullaev R.Z., Chilin V. Isomorphic Classification of *-Algebras of log-Integrable Measurable Functions.Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 264, pp.73-83. Springer, Cham.
4. Abdullaev R., Chilin V., Madaminov B. Isometric F-spaces of log-integrable function. Siberian Electronic Mathematical Reports. том 17, pp. 218-226(2020).
5. Duren P.L., Theory of Hp spaces, Pure and Applied Mathematics, Vol. 38, Academic Press, New York-London, 1970.
6. Vladimirov D.A. Boolean Algebras in Analysis. Mathematics and its Applications, 540, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).